

Im Versuch sollen sukzessive einige temperatur- und feldabhängige Material- und Transporteigenschaften eines Halbleiters bestimmt werden. Die Messungen finden hierbei automatisiert statt und Sie müssen einen Großteil der Ansteuerung selbst konzeptionieren. Natürlich werden Ihnen grundlegende Ansteuerungs-Funktionen zur Verfügung gestellt. Alle Messaufgaben sind zu dokumentieren und immer mit theoretischen Erwartungen, bzw. Literaturdaten zu diskutieren. Rohdaten sind dem Betreuer digital bereitzustellen.

Messaufgaben

1. Als Eichkurve ist das Magnetfeld als Funktion des Feldstromes bis 4A (bzw. 10A am zweiten Messplatz) mittels Magnetometer zu bestimmen (**Achtung: höhe Ströme nur kurz fließen lassen!**). Messen Sie die gesamte Magnetisierungskurve mit min. 20 Messpunkten von -4A bis +4A (bzw. -10A...+10A) und zurück. Messen Sie dann bei $\approx I_{max}/2$ das radiale Profil des Magnetfeldes (ca. 2mm Schritte) stichprobenartig und vergleichen Sie mit der theoretischen Erwartung.

Machen Sie sich zunächst sorgsam mit den Anschlüssen der Halbleiterplatine vertraut (siehe Abb. III). Seien Sie sorgsam beim Stecken des Vielfachsteckers. Überlegen Sie sich wie Sie die jeweiligen Messgrößen bestimmen wollen. Testen Sie zunächst die Erwärmung der Probe (beachten Sie untenstehende Hinweise!) und prüfen Sie $T(I_{Heiz}, t)$ bis zur zulässigen Maximaltemperatur. Hängen Sie diese Kurve ihrem Messprotokoll an und diskutieren Sie das Ergebnis vorab mit dem Betreuer des Versuchs.

Sodann sind für die bereitgestellte intrinsische Germanium-Probe zu bestimmen:

2. Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes R , bzw. der elektrischen Leitfähigkeit σ ist zu bestimmen. Verwenden Sie dazu die $6\frac{1}{2}$ -stelligen Tischmultimeter für die Messung von Strom und Spannung. Führen Sie wenn nötig die Strommessung mittels Shunt durch.
3. Aus der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit die Größe der Bandlücke E_g zu bestimmen. Benutzen Sie einen Arrhenius-Plot: $\ln(\sigma) = f(10^3/T)$. Bestimmen Sie darüber hinaus auch die Größe der Bandlücke unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit $E_g(T)$ nach Varshni *et al.* [1].
4. Mit den gemessenen Größen und den effektiven (Zustandsdichte-)Massen von Ge ist die Temperaturabhängigkeit der Eigenleitungskonzentration $n_i(T)$ zu bestimmen.
5. Gesucht ist final die Temperaturabhängigkeit der Mobilitäten $(\mu_n + \mu_p) = f(T)$.

Hinweise: Programmatische Absicherung der Probertemperatur $< 165^\circ\text{C}$; Heizstrom $< 3\text{ A}$; Probe immer nur kurz erwärmen, Aufbau nicht für Dauerbetrieb geeignet; longitudinaler Probenstrom $< 30\text{ mA}$. Kristallmaße: $\ell_x = 20\text{ mm}$, $\ell_y = 10\text{ mm}$, $h_z = 1\text{ mm}$.

Alle Messungen sind gemittelt durchzuführen, d.h. je Temperaturschritt $\Delta T(\Delta t)$, $\Delta T \approx 5\text{ K}$, $\Delta t \approx 60\text{ s}$ werden die Digitalmultimeterdaten gemittelt - die Funktionen `calc:stat on` & `calc:func aver` werden Ihnen sehr helfen. Achten Sie darauf, dass der Messbereich stets automatisch eingestellt ist, bzw. passend gewählt wird und nicht in die Begrenzung (**OVERLOAD**) läuft. Besprechen Sie gerne den Ablauf Ihrer Messung mit dem Betreuer des Versuchs.

Gegeben sind weiterhin zwei Störstellenhalbleiter: n-Ge und p-Ge. Für die Messung der HALLspannung wird das Magnetfeld per serieller Schnittstelle umgeschaltet. Der Code zur Ansteuerung wird Ihnen zur Verfügung gestellt.

Man bestimme während einer Erwärmung für beide Proben die Temperaturabhängigkeit folgender Messgrößen:

6. Elektrische Leitfähigkeit $\sigma_n(T), \sigma_p(T)$.
7. Transversale HALL-Spannung U_H (beachten Sie das Vorzeichen!). Explizit darzustellen sind $U_H(+B), U_H(-B), U_H(B = 0)$, sowie letztendlich die Nullfeld-korrigierten Daten für U_H .
8. Magnetowiderstand $(\rho + \Delta\rho)/\rho$. Messen Sie außerdem bei Raumtemperatur die Abhängigkeit dieser Größe vom Magnetfeld für beide Proben. Bestimmen Sie μ .

Aus den Messergebnissen sind folgende Kenngrößen abzuleiten:

9. Die HALL-Beweglichkeiten μ_n, μ_p für Elektronen und Löcher im Störleitungsreich.
10. Für Raumtemperatur sind die HALL-Koeffizienten und die HALL-Beweglichkeiten zu ermitteln.
11. Die Donator- (N_d) bzw. Akzeptorkonzentration (N_a) der Störstellenhalbleiter ist zu berechnen.
12. Die Aktivierungsenergien, bzw. Störstellenniveaus für Donatoren (E_D) bzw. Akzeptoren (E_A) sind zu bestimmen.

Jeweilige Messungen sind für Loch- und Elektronenleitungen gemeinsam darzustellen und mit Literaturdaten zu vergleichen. Stellen Sie eine Vermutung an mit welchen Elementen der Ge-Kristall dotiert wurde.

(a) Ge

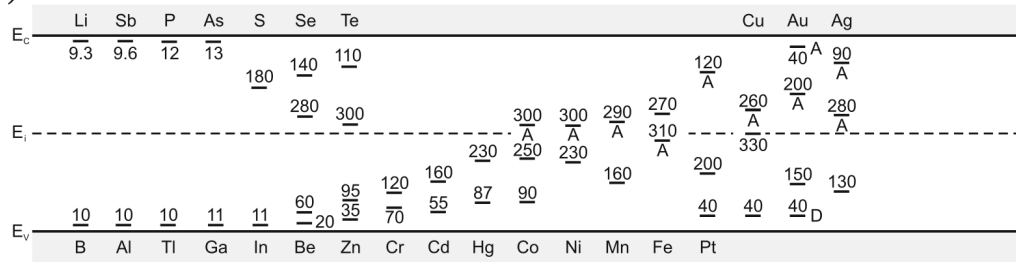


Abbildung I: Energie-Niveaus verschiedener Defekte in reinem Germanium. Angabe in meV relativ zu den Bandkanten $E_{C,V}$ des Leitungs- und Valenzbandes ($C = \text{conduction band}$, $V = \text{valence band}$). Die intrinsische Energie in der Bandlücke ist E_i .

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter intrinsischer Leitfähigkeit?
2. Durch welche Größen wird die Leitfähigkeit eines Kristalls bestimmt?
3. Welches ist der dominierende Streumechanismus für Ladungsträger in Metallen und schwach dotierten Halbleitern? Welche Auswirkungen hat dieser?
4. Was besagt die Matthiessensche Regel (Restwiderstand von Metallen)?
5. Was beschreibt die „effektive Masse“? Was das chemische Potential μ ?
6. Was unterscheidet direkte & indirekte Halbleiter und welche Auswirkungen hat diese Eigenschaft auf seine Transporteigenschaften?
7. Was besagt der positive Magnetwiderstand in Halbleitern?
8. Interpretieren Sie Abb. I & Abb. II.

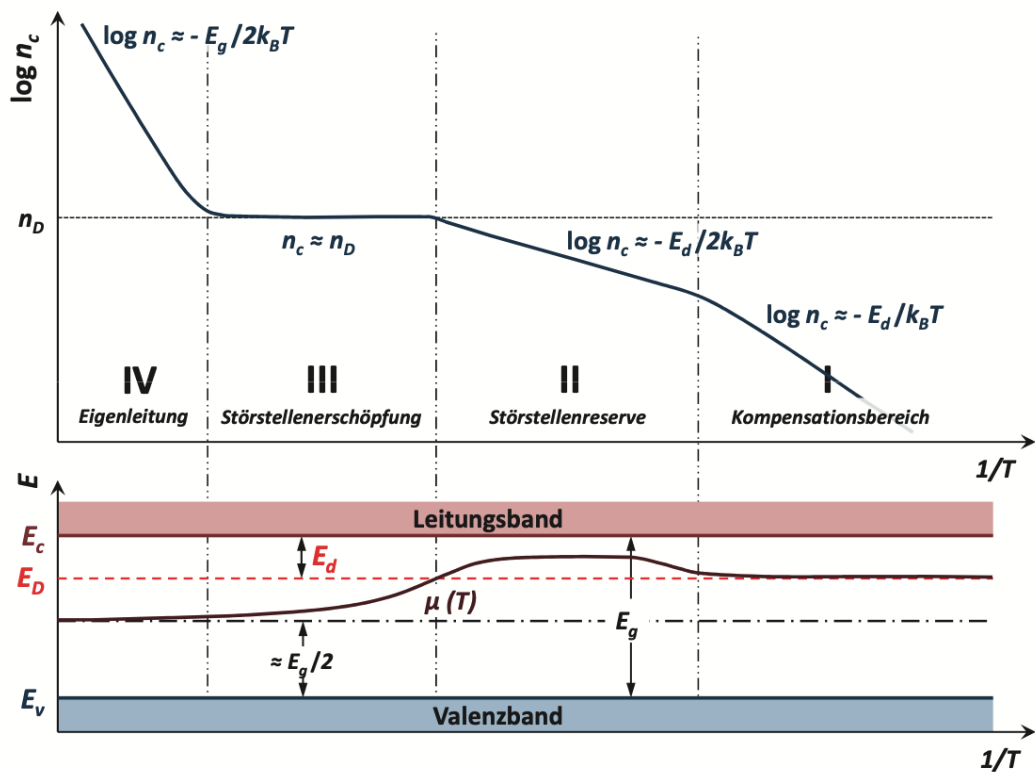


Abbildung II: Temperaturverlauf der Ladungsträgerdichte n und des chemischen Potentials μ in einem dotierten n-Typ Halbleiter. Im Bereich I liegt Störstellenkompensation durch eine endliche Akzeptordichte vor, im Bereich II dominiert reine Störstellenleitung, im Bereich III der Störstellenerschöpfung sind sämtliche Störstellen ionisiert, so dass die Ladungsträgerdichte etwa konstant bei steigender Temperatur bleibt, und im Bereich IV tritt die Eigenleitung gegenüber der Störstellenleitung in den Vordergrund.

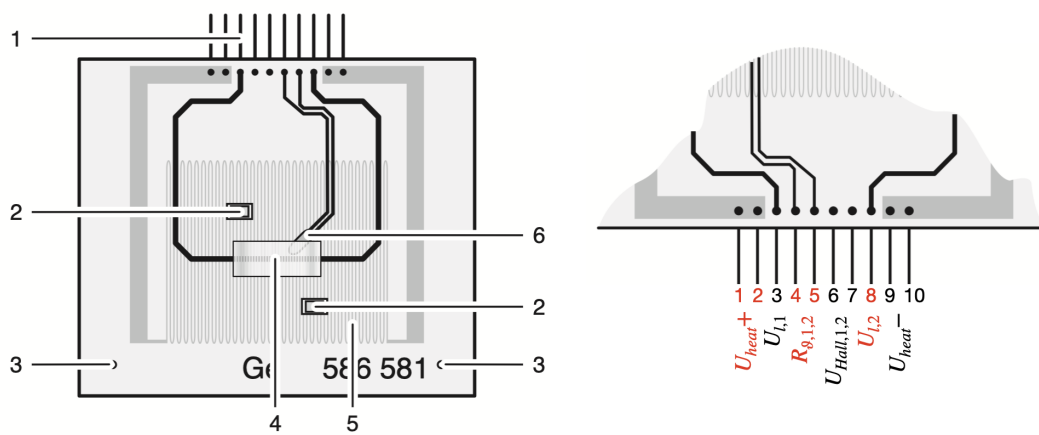


Abbildung III: (links) Schematische Darstellung der Germanium-Platine. Nummert sind: (1) Vielfachstecker (2) Abstandshalter (3) Klemmstifte (4) Germanium-Einkristall (5) Heizmäander (6) Pt100-Temperaturfühler (rechts) Zoom auf die Anschlüsse des Vielfachsteckers mit entsprechender Beschaltung.

Literaturverzeichnis

- [1] Varshni, Y. P., *Physica* 34, 149-154 (1967)
- [2] Rudolf Gross und Achim Marx, *Festkörperphysik, Kapitel 7 & 10*, De Gruyter Studium (2018)
- [3] Marius Grundmann, *The Physics of Semiconductors*, Springer (2021)
- [4] Peter Yu und Manuel Cardona, *Fundamentals of Semiconductors*, Springer (2005)
- [5] F. J. Morin und J. P. Maita, *Phys. Rev.* 94, 1525 (1954)
- [6] P. P. Debye und E. M. Conwell, *Phys. Rev.* 93, 693 (1954)
- [7] Kohler, *Theorie der magnetischen Widerstandseffekte in Metallen*, *Annalen der Physik* 32, 211 (1938).

Die Literatur wird Ihnen auf Nachfrage vom Betreuer auch digital zur Verfügung gestellt.

1 Die elektrische Leitfähigkeit

In diesem Praktikumsversuch untersuchen wir Gesetze der Kinetik von Leitungselektronen in kristallinen Festkörpern. Das einfachste Gesetz der elektrischen Leitfähigkeit ist das makroskopische OHMSche Gesetz:

$$U=I \cdot R \quad (1)$$

Der OHMSche Widerstand

$$R=\rho \cdot \frac{\ell}{A} \quad (2)$$

ist über den spezifischen elektrischen Widerstand ρ material- und geometrieabhängig. Die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Kristalls ist

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

Mit der Stromdichte $j=\frac{I}{A}$ und dem elektrischen Feldvektor \vec{E} wird aus Gl. (1)

$$\vec{j}=\sigma \cdot \vec{E} \quad (4)$$

Das OHMSche Gesetz Gl. (4) beschreibt in dieser Form den linearen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke, setzt also die Unabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der Feldstärke voraus. Analog zum Massentransport ($j=\rho_M \cdot v_D$; Stromdichte aus Massendichte und resultierender, gerichteter Driftgeschwindigkeit) ist die Stromdichte des Ladungstransports:

$$j=n \cdot e \cdot v_D \quad (5)$$

wobei die Massendichte ersetzt wird durch die Ladungsdichte der Leitungselektronen ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{As}$). Die Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen entsteht durch das äußere elektrische Feld. Letzteres bewirkt eine Störung des thermischen Gleichgewichts im Kristall. Der Gleichgewichtszustand der Leitungselektronen wird in Anlehnung an die kinetische Gastheorie mit dem Modell eines *Elektronengases* beschrieben: Die Elektronen bewegen sich regellos mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in alle möglichen Richtungen, so dass keine resultierende Geschwindigkeit entsteht. Für den Mittelwert des Quadrats der Elektronengeschwindigkeiten im thermodynamischen Gleichgewicht gilt:

$$\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (6)$$

Da sich die Elektronen im Kristall in drei Raumrichtungen bewegen können und pro Freiheitsgrad nach dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik eine Energie von $\frac{k_B T}{2}$ zu veranschlagen ist, behandeln wir die Elektronen in diesem Modell als freie Elektronen

ohne eine potentielle Wechselwirkungsenergie untereinander oder mit den Atomrümpfen. Dieser Idealzustand muss natürlich problemorientiert einem realistischeren Zustand angenähert werden. Ein in x-Richtung am Kristall angelegtes elektrisches Feld beschleunigt alle N Leitungs-elektronen in (-x)-Richtung. Die positive Feldrichtung zeigt per Definition von + nach -. Für das beliebig ausgewählte i-te Elektron gilt demnach

$$m \cdot a_{ix} = -e \cdot E_x \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv_{ix}}{dt} = -\frac{e}{m} E_x \quad (7)$$

Da die rechte Seite von Gl. (7) für alle Elektronen gilt, kann man mit einer mittleren Elektronengeschwindigkeit arbeiten:

$$\langle v_x \rangle = \sum_{i=1}^N v_{ix} \quad (8)$$

Sie gilt für alle N Elektronen, und mit Gl. (7) ist:

$$\frac{d\langle v_x \rangle}{dt} = -\frac{e}{m} \cdot E_x \quad (9)$$

Andererseits ist mit Anwendung von Gl. (5) jetzt

$$j_x = -n \cdot e \cdot \langle v_x \rangle \quad (10)$$

Das Minuszeichen in Gl. (10) folgt wieder aus der Festlegung der positiven Stromrichtung von + nach -, während die Richtung der Driftgeschwindigkeit $\langle v_x \rangle$ für Elektronen dieser Richtung entgegengläuft. Differenziert ergibt sich

$$\frac{d\langle v_x \rangle}{dt} = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{dj_x}{dt} \quad (11)$$

Aus Gleichungen (9) und (11) folgt

$$\frac{dj_x}{dt} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot E_x \quad \text{bzw.} \quad j_x = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot E_x \cdot t \quad (12)$$

Für ein konstantes elektrisches Feld wächst die Stromdichte zeitlinear. Das ist im Widerspruch zur Realität des OHMSchen Gesetzes und eine Folge des Modells freier Elektronen in (9). Da bei Stromfluss Wärme entsteht, ist es gerechtfertigt, neben dem Beschleunigungsterm des elektrischen Feldes nach Gl. (9) einen Verzögerungsterm gleichen Betrages in den Transportvorgang einzubauen, so dass sich eine gleichförmige Kinetik mit $d\langle v_x \rangle/dt = 0$ ergibt. Bei der gerichteten Bewegung der Elektronen durch das Kristallgitter entstehen zusätzliche Kollisionen mit den Atomrümpfen (Streuung). Dieser Energieaustausch via "Elektron-Gitter-Streuung" (besser Elektron-Phonon-Streuung) liefert die "Reibungskraft" zur Elektronenbewegung:

$$\left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{el.Feld} + \left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{Streuung} = 0 \quad (13)$$

Gleichung (13) ist die BOLTZMANN-Transportgleichung. Der einfachste Weg zur Formulierung eines Streutermes in Gl. (13) führt über die Beobachtung der Zeitabhängigkeit des Verlaufs von $\langle v_x \rangle(t)$ nach Abschalten des Feldes E_x . Das elementarste Abklinggesetz, das zur Einstellung des neuen Gleichgewichts führt (diesen Vorgang nennen wir Relaxation), ist:

$$\langle v_x \rangle_t = \langle v_x \rangle_{t_0} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (14)$$

Das elektrische Feld wird zur Zeit $t = 0$ abgestellt. Nach der Relaxationszeit τ ist die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen um den Faktor $(1/e)$ gesunken. Nach Gl. (13) benötigt man

$$\left. \frac{d\langle v_x \rangle}{dt} \right|_{\text{Streuung}} = -\frac{\langle v_x \rangle}{\tau} \quad (15)$$

Vorausgesetzt, dass sich Gl. (15) für $E_x > 0$ nicht ändert, können wir (15) in (13) einsetzen. Zusammen mit Gl. (9) in Gl. (13) erhält man

$$-\frac{e}{m} \cdot E_x - \frac{\langle v_x \rangle}{\tau} = 0 \quad (16)$$

Umgestellt liefert diese Gleichung die mittlere Elektronendriftgeschwindigkeit im elektrischen Feld E_x :

$$\langle v_x \rangle = -\frac{e \cdot \tau}{m} \cdot E_x \quad (17)$$

Die Kombination von Gl. (17) mit den Gleichungen (4) und (10) ergibt

$$\sigma = n \cdot e^2 \cdot \frac{\tau}{m} \quad (18)$$

Der Ausdruck

$$\mu = \frac{e\tau}{m} = \frac{\langle v_x \rangle}{E_x} \quad (19)$$

wird als Elektronenbeweglichkeit bezeichnet. Mit dieser gilt für die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu \quad (20)$$

Die spezifische Leitfähigkeit von Kristallen wird wesentlich von zwei Faktoren beeinflusst: der Konzentration der Leitungselektronen n und der Elektronenbeweglichkeit μ . Zur Bestimmung beider Größen benötigt man neben Gl. (20) noch eine zweite Relation, d. h. eine zweite Messmethode. Diese wird uns durch den HALL-Effekt gegeben.

Mit Gl. (14) wird eine Einstellzeit zwischen zwei Gleichgewichtszuständen definiert, dem thermodynamischen und dem durch ein äußeres elektrisches Feld gestörten thermodynamischen Gleichgewicht. In Abb. 1 ist vereinfacht dargestellt, was aus energetischer

Sicht in einem Elektronenband eines einwertigen Metalls passiert. Das Elektronenband besteht aus Quantenzuständen, die so dicht beieinander liegen, dass man von einer quasikontinuierlichen Verteilung ausgehen kann.

Jeder Elektronenzustand kann von zwei Elektronen entgegengesetzten Spins besetzt werden, welche ohne externes Magnetfeld, interne Magnetisierung oder Spin-Bahn-Wechselwirkung ununterscheidbar sind: Entartung bezüglich des Spins. Ohne äußeres Feld fließt zudem kein Strom. Das elektrische Feld bewirkt nach Abb. 1, dass sich mehr Elektronen in Feldrichtung bewegen als in Gegenrichtung. Nach Abschalten des Feldes stellt sich nach der Relaxationszeit τ aus dem Zustand b) über Relaxation c) der Zustand a) ein.

Die Elektronenkinetik lässt sich sehr vereinfacht mit Hilfe der Begriffe der kinetischen Gastheorie beschreiben. Nach Gl. (9) bewegt sich das Elektron im äußeren elektrischen Feld geradlinig beschleunigt. Diese Beschleunigungsphase liegt zwischen zwei Kollisionen mit Gitterstörungen, Gitterschwingungen (Phononen) oder anderen Elektronen und kann klassisch als Reibungskraft verstanden werden. In dieser Phase hat das Elektron eine mittlere freie Weglänge Λ zurückgelegt. Für diesen Weg Λ benötigt das Elektron eine mittlere freie Flugzeit τ^* . Von Interesse ist natürlich vorhandene Zusammenhang von Relaxations- und Flugzeit. Für ein einfaches Stoßmodell, in dem jede Kollision das Elektron in den thermodynamischen Gleichgewichtszustand streut, ist $\tau = \tau^*$. Die Impulsänderung des Elektrons ist in diesem Modell maximal: p_{max} . Wenn die Kollision schwächer ist (Impulsänderung $p < p_{max}$) dann gilt $\tau^*/\tau = p/p_{max}$.

Die Relaxationszeit τ kann bei schwacher Reibungskraft (mittlerer Streuwinkel $< 90^\circ$) deutlich größer sein als die Flugzeit τ^* . Die mittlere freie Flugzeit kann man aus

$$\tau^* = \frac{\Lambda}{v} \quad (21)$$

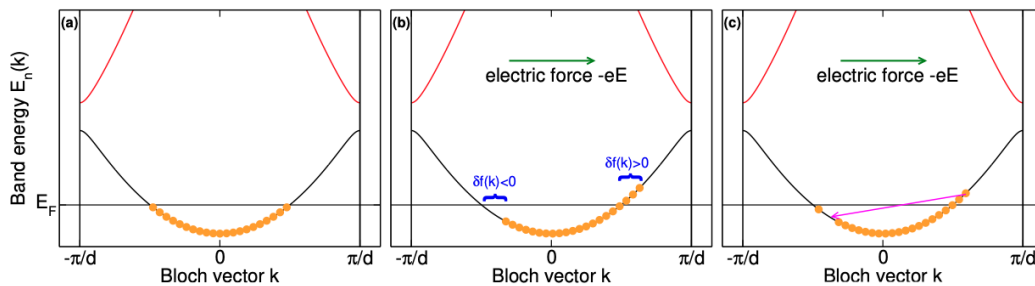


Abbildung 1: a) thermodynamisches Gleichgewicht b): gestörtes Gleichgewicht und Umbesetzung von Zuständen durch äußeres Feld E_x c): angehendes Gleichgewicht durch entgegenwirkende Streuprozesse - Relaxation der Zustände.

errechnen. Nach Gleichungen (6) und (17) hat ein Elektron die Gesamtgeschwindigkeit

$$\nu_g = \nu + \langle \nu_x \rangle \quad (22)$$

Sie addiert sich auf aus der statistischen (thermischen) Geschwindigkeit ν und aus der Driftgeschwindigkeit $\langle \nu_x \rangle$. Nach (6) ist $\nu = \sqrt{3 \cdot k_B \cdot T / m}$. Für 300 K folgt daraus $\nu = 1,2 \times 10^5 \text{ m/s}$. Wenden wir zur Abschätzung der Driftgeschwindigkeit Gl. (10) auf einen 1,6 cm starken Kupferstab an durch den einen feldinduzierten Strom von 1 A fließt, dann erhalten wir $\langle \nu_x \rangle = 3,7 \times 10^{-7} \text{ m/s}$. Kupfer ist einwertig und hat eine atomare Dichte von $8,45 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Das repräsentative Beispiel verdeutlicht die Situation: Die mit hoher Geschwindigkeit ungerichtet diffundierenden Elektronen bewegen sich mit sehr langsamer Driftgeschwindigkeit entgegen der Feldrichtung. In Gl. (21) wird zur Bestimmung der mittleren freien Flugzeit die thermische Geschwindigkeit eingesetzt. Die Driftgeschwindigkeit kann vernachlässigt werden. Nun gilt Gl. (6) für freie Elektronen. Die Boltzmann-Gleichung zeigt aber, dass die Elektronen im Kristall nicht frei sind und Streuungen unterliegen. Die statistische Geschwindigkeit der Elektronen in einem Kristall kann aus dessen elektronischer Bandstruktur $E(k)$ nach

$$\nu = \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{dE}{dk} \quad (23)$$

berechnet werden. Der Begriff elektronische Bandstruktur wurde bereits im Zusammenhang mit einer ortsabhängigen Elektronenenergie (siehe Abb. 1) erwähnt. Beim Aufbau eines kristallinen Festkörpers aus isolierten Atomen ("Atomkondensation") ändert sich die Energie der in der äußersten Schale vorhandenen Elektronen (Valenzelektronen). Als Teilchen mit halbzahligen Spin (Fermionen) müssen sie ihre vor der Kondensation übereinstimmenden Energiewerte aufgeben (Pauliverbot). Aus einem im Atom scharfen Energieniveau entsteht durch diese atomare Wechselwirkung ein Energieband. Sichtbar wird diese Niveaubreiterung z.B. beim Vergleich von Emissionsspektren verschiedener Hg-Dampflampen: Während eine Niederdrucklampe ein Linienspektrum emittiert, erkennt man bei der Hochdrucklampe breite Bänder. Neben der Niveaubreiterung bewirkt die Kondensation zum Festkörper, dass sich die Außenelektronen von ihrem jeweiligen Atomrumpf weit entfernen können und wesentlich zum Transport beitragen. Im Unterschied zu diesen Valenzelektronen bleiben die anderen Rumpfelektronen am jeweiligen Atomkern lokalisiert.

Der Ladungstransport soll nach Gl. (6) im Modell freier Elektronen beschrieben werden: aus den Valenzelektronen werden Leitungselektronen. Die dazu notwendigen Modellannahmen sind dabei: (i) Die Leitungselektronen haben untereinander keine Coulombwechselwirkung und (ii) Die potentielle Energie der Leitungselektronen im Kristall ist klein gegenüber ihrer kinetischen Energie. Damit kann auch eine Ortsabhängigkeit des Potentials vernachlässigt werden. Die *a priori* sehr vereinfachten Annahmen werden mit folgender Ladungsverteilung begründet (Abb. 2).

Die Atomrümpfe bilden einen homogenen positiv geladenen Ladungsuntergrund, in dem die Leitungselektronen einen Elektronensee bilden. Die positive Ladung verhindert, dass die Elektronen via Coulombwechselwirkung repulsieren. Nach Abb. 2 kommt eine zusätzliche Probeladung als Sonde in diesen Elektronensee. Die Coulombkraft drückt den See von der negativ geladenen Sonde weg. Aber nur so weit, bis der (freigelegte) positive Untergrund die Störladung neutralisiert hat. Nun kann man sich jedes einzelne Elektron des Sees als Probeladung vorstellen und auf die genannte Art neutralisieren. Elektron für Elektron wird die negative Ladung durch den positiven Untergrund abgeschirmt. Das ist der Grundgedanke der "Einelektronennäherung". Jedes Elektron wird von einer positiven Ladung von Nachbarlektronen abgeschirmt, wobei letztere dem gleichen Abschirmeffekt unterliegen. Anders gesagt: Die langreichweitige Coulombwechselwirkung wird in eine kurzreichweitige umgewandelt. Diese 2. Annahme wird in Abb. 3 illustriert. In der Reihe der Atomrümpfe fallen die Elektronen nicht in die Potentialmulden (Lokalisierung der Leitungselektronen am Atomrumpf), weil ihre kinetische Energie in dem Leitungsband zu groß ist. Der Größenunterschied zwischen kinetischer und potentieller Energie ist aus der relativen Lage zwischen den (gegenüber dem freien Atom abgesenkten) Potentialbergen und der Unterkante des Leitungsbandes ersichtlich.

Nachdem die Begründung für das Modell freier Elektronen vorliegt, können wir uns seinen Grenzen zuwenden. Für freie Elektronen ist die Energie mit dem Impuls über

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (24)$$

gekoppelt. Da Elektronen je nach Versuchsbedingungen neben Teilchen- auch Welleneigenschaften zeigen, ist unter Berücksichtigung der DE-BROGLIE-Beziehung

$$\lambda p = h \quad (25)$$

die die Teilchengröße (Impuls p) mit der Wellengröße (Wellenlänge λ) verknüpft, neben

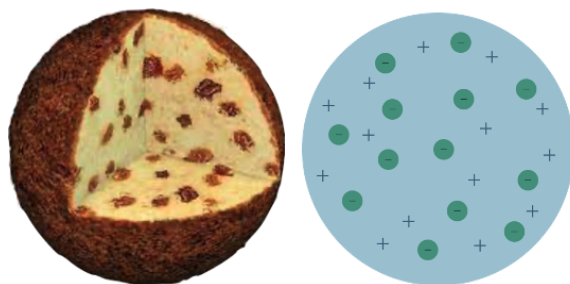


Abbildung 2: Neutralisierungsmodell einer Elektronenladung – plum pudding model (Thomson model) – grau: positiv geladener, homogener Hintergrund, grün: „freie“ Elektronen

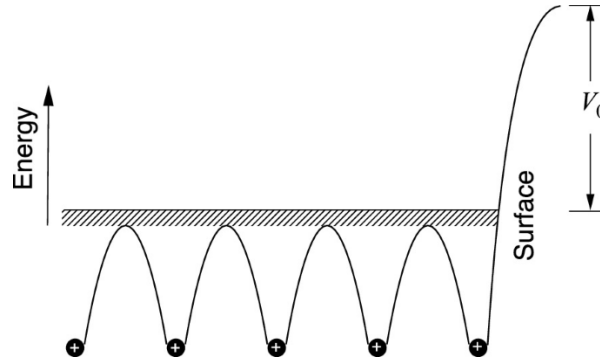


Abbildung 3: Periodisches Potential verursacht durch die Atomrümpfe mit Abstand a . Offensichtlich ist eine Erhöhung des Potentials zur Oberfläche der Probe. Dieses zusätzliche Potential kann mit der Austrittsarbeit eines Elektrons aus einem Festkörperkristall assoziiert werden.

Gl. (24) auch die folgende Relation Gl. (26) gültig:

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad (26)$$

Mit der Wellenzahl

$$k = 2\pi/\lambda \quad (27)$$

folgt sofort

$$E(k) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{k^2}{2m} = \hbar^2 \frac{k^2}{2m} \quad (28)$$

Die elektronische Bandstruktur freier Elektronen zeichnet sich durch einen parabelförmigen $E(k)$ -Verlauf aus. Der Potentialverlauf in Abb. 3 lässt vermuten, dass der Begriff des freien Elektrons in der Nähe der positiven Atomrümpfe nicht anwendbar ist. In der Sprache der Wellenmechanik äußert sich das in Unstetigkeiten im Parabelbild für die charakteristischen Wellenzahlwerte $k = n\pi/a$ (siehe Abb. 4). Für diese k -Werte ist nach Gl. (23) die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit gleich Null. So entstehen die in Abb. 4 angegebenen, verbotenen Energiebereiche. Diese Bandstruktur beschreibt sowohl Metalle als auch Halbleiter und Isolatoren. Bildet man mit Hilfe von Gl. (28) d^2E/dk^2 , dann erhält man für freie Elektronen

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2E}{dk^2} =: \frac{1}{m^*} \quad (29)$$

Da die Krümmung der $E(k)$ -Abhängigkeit von der Wellenzahl selbst abhängt, ist $m(k)$ natürlich nicht die *klassische* Masse des freien Elektrons. Die Masse des Elektrons im Festkörper ist nach Abb. 4 an der oberen Bandkante ($|k| = \pi/a$) sogar negativ! Deshalb bezeichnen wir Gl. (29) als Definitionsgleichung der effektiven Masse der Ladungsträger

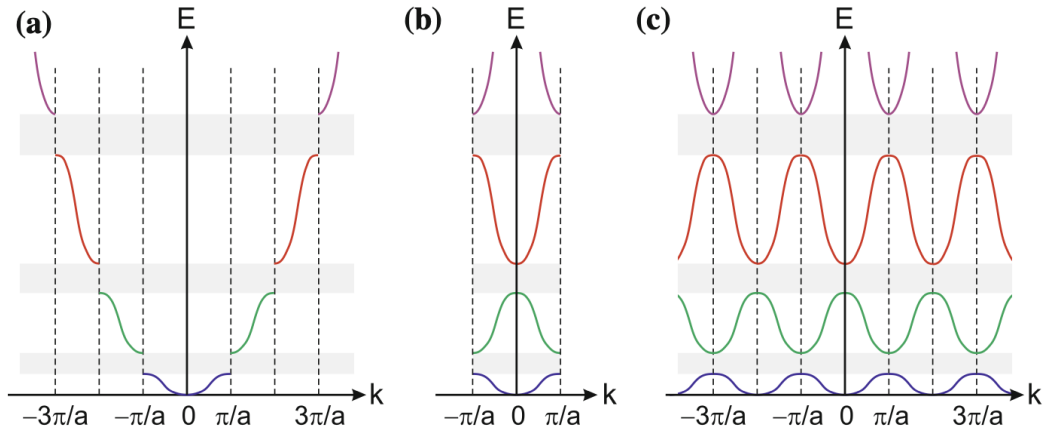


Abbildung 4: Elektronische Bandstruktur $E(k)$ im Modell nahezu freier Elektronen (NFE-Näherung). Dargestellt sind das a) erweiterte b) reduzierte und c) periodische Zonenschema.

im kristallinen Festkörper. Um eine Verwechslung mit der *physischen, klassischen* Masse zu vermeiden wird sie häufig mit m^* deklariert.

Von den Ladungsträgern ergeben sich offensichtlich im Festkörper zwei Arten: An der unteren Bandkante (um $k = 0$) finden wir Elektronen mit der Ladung $-e$ und $m > 0$. Im Umkehrschluss folgt aus $m < 0$ das die Ladung um $|k| = \pi/a$ positiv ($+e$) sein muss, denn nur dann kann Gl. (7) für beide Fälle angewendet werden. Hier begegnen wir erstmals den für die Halbleiter so bedeutsamen komplementären Ladungsträgern, die Löcher oder auch Defektelektronen genannt werden. Dass diese sich "umgepolt" benehmen, sieht man auch an ihrer statistischen Geschwindigkeit. An der unteren Bandkante ist v proportional k , an der oberen Bandkante dagegen gilt $v(-k)$. Sie verhalten sich im elektrischen Feld also entgegengesetzt gerichtet.

Für unsere Experimente mit dem Halbleiter Germanium können wir davon ausgehen, dass die Elektronen in der Nähe der unteren Kante des Leitungsbandes sich ebenso wie freie Ladungsträger verhalten wie die Löcher an der Oberkante des Valenzbandes.

2 Halbleiter

Metalle leiten den elektrischen Strom gut, weil die nicht vollständig gefüllten Energiebänder den Elektronen erlauben, aus dem äußeren elektrischen Feld kinetische Energie aufzunehmen. Innerhalb eines Energiebandes sind die Zustände bis zum FERMI-Niveau E_F mit Elektronen besetzt, die höherenergetischen Quantenzustände sind frei. Bei den Halb-

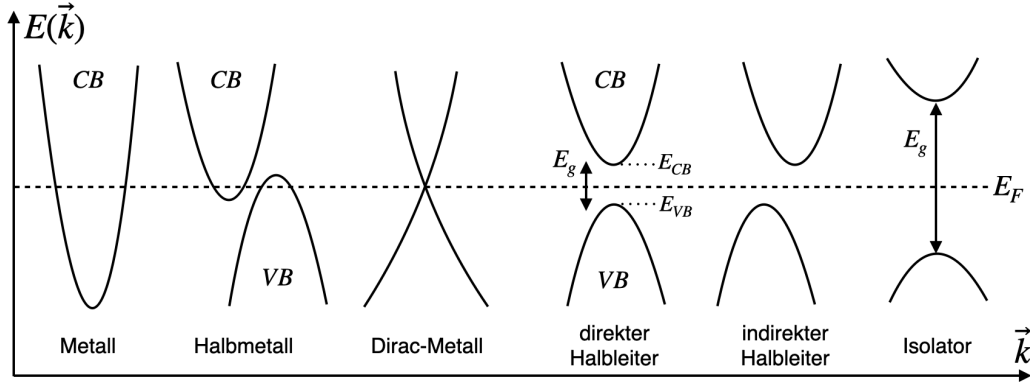


Abbildung 5: Energieschema für verschiedene Typen von Metallen, Halbleitern und Isolatoren. Hierbei bezeichnet CB, VB das Leitungs-, bzw. Valenzband. E_{CB}, E_{VB} sind die dazugehörigen Bandkanten und die Differenz E_g gibt die mögliche *verbotene* Energielücke, die Bandlücke, an.

leitern füllen die Bindungselektronen die Zustände des Valenzbandes vollkommen auf, so dass dieses Band zunächst keinen Beitrag zur elektrischen Leitfähigkeit leisten kann. Für $T = 0 \text{ K}$ ist der Halbleiter ein Isolator.

Beide unterscheidet die Größe der Bandlücke E_g zwischen dem mit Elektronen vollbesetzten Valenzband und dem Leitungsband der unbesetzten Zustände (vgl. Abb. 4 und Abb. 5). Wenn die Energielücke genügend schmal ist (wenige $k_B T$), können durch thermische Anregung Elektronen in das Leitungsband gelangen. Dort sind sie freier für die Aufnahme von Energie aus einer äußeren Quelle. Das Elektron verlässt seinen Atomrumpf, es kann sich (mit der äußeren Hilfe) zwischen den Atomrümpfen bewegen, so wie es für Elektronen in einer metallischen Bindung für alle Temperaturen möglich ist.

Trotzdem sind bei ausreichend hohen Temperaturen Metalle und Halbleiter in ihrem elektrischen Leitvermögen grundsätzlich verschieden. Das hängt mit den bereits erwähnten Löchern als zweite Ladungsträgerart zusammen. Das Elektron im Leitungsband hinterlässt im Valenzband eine (positive) Elektronenlücke, die an einem Atomrumpf entsteht. Aus einem benachbarten Atom kann diese Lücke aufgefüllt werden. Die positive Lücke wandert also entgegengesetzt zum Elektronenstrom und beteiligt sich am Ladungstransport als Löcherstrom. Analog zu Gl. (20) ist die Leitfähigkeit eines Halbleiters gegeben durch eine simplifizierte "Zweibandleitung":

$$\sigma = n (-e) \cdot (-\mu_n) + p (+e) \cdot \mu_p = e (n\mu_n + p\mu_p) \quad (30)$$

n und p sind die Ladungsträgerkonzentrationen in Leitungs- bzw. Valenzband, μ_n und μ_p sind die Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeit. Sehr häufig gilt $\mu_p < \mu_n$. Wenn

$$E_L - E_F \geq 4k_B T \quad (31)$$

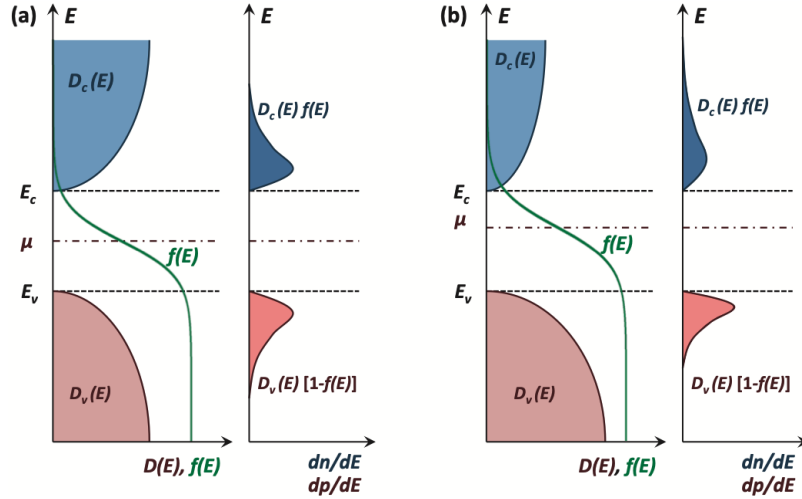


Abbildung 6: Energieabhängigkeit von Zustandsdichten und Besetzungswahrscheinlichkeiten für gleiche und verschiedene Zustandsdichten von Leitungs- und Valenzband. Man beachte das variierende chemische Potential μ . Allgemeine Situation der Ladungsneutralität: $n = p$ (Eigenleitung; intrinsischer Halbleiter).

gilt für die Leitungsband-Elektronenkonzentration

$$n = D_L \cdot e^{-\frac{E_L - E_F}{k_B T}} \quad (32)$$

Mit der Einschränkung Gl. (31) steht in Gl. (32) an Stelle der FERMI-DIRAC-Verteilung die BOLTZMANN-Verteilung als Ausdruck für die Besetzungswahrscheinlichkeit für die Zustände der Zustandsdichte D . Mit der Annahme Gl. (31) erreicht man ein verdünntes Elektronengas im Leitungsband, so dass nur wenige Zustände der in großer Zahl zur Verfügung stehenden Zustände besetzt sind. Dann ist es ohne großen Fehler möglich, die Quantenstatistik (FERMI-DIRAC) durch die klassische Statistik (BOLTZMANN) zu ersetzen. In der Halbleiterphysik spricht man nun häufig von der Nichtentartungsnäherung (*engl. non-degenerate limit*).

Die Zustandsdichte ist i.A. energieabhängig. Für einen dreidimensionalen Volumenfestkörper (*engl.: bulk*) gilt $D(E) \propto \sqrt{E}$ (siehe Abb. 6). Für eine geringe Besetzungsdichte im Leitungsband ersetzt man das Energieband durch das Energieniveau E_C der unteren Bandkante mit einer temperaturabhängigen Zustandsdichte (effektive Zustandsdichte N_C der Nichtentartungsnäherung):

$$n = N_C \cdot e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} \quad \text{mit} \quad N_C = 2 \left(\frac{m_n^* \cdot k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (33)$$

Für die elektrische Leitfähigkeit maßgebend ist neben der Elektronenleitung im Leitungsband auch die Löcherleitung im Valenzband. Analog zu Gl. (33) gilt für die gering

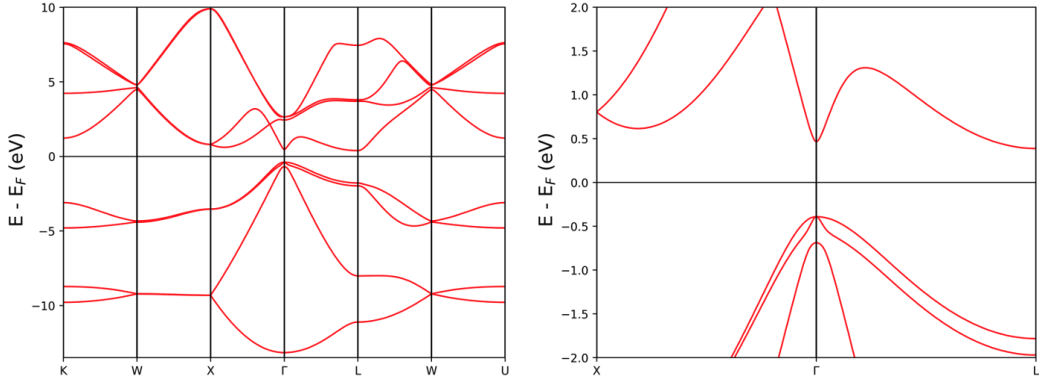


Abbildung 7: Elektronische Bandstruktur $E(k)$ von Germanium entlang von Hochsymmetrielinien verschiedener k (eigene theoretische *ab initio* Rechnungen). Rechts zu sehen ist ein Zoom nahe an den Bandkanten um den Γ -Punkt. Man erkennt die indirekte Bandlücke von Germanium entlang ΓL zusammen mit den deutlich unterschiedlichen Bandkrümmungen, sprich effektiven Massen m^* , für Elektronen und Löcher. Da hier eine voll-relativistische Rechnung erfolgte, sind zusätzliche Aufspaltungen der Bänder durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu erkennen. Letzteres ist vergleichbar mit den zusätzlichen Energieniveau-Aufspaltungen $j = l \pm \frac{1}{2}$ beim anomalen ZEE-MAN-Effekt.

besetzten (also nur gering von Elektronen befreiten) Zustände in der Nähe der Oberkante des Valenzbandes:

$$p = N_V \cdot e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} \quad \text{mit} \quad N_V = 2 \left(\frac{m_p^* \cdot k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (34)$$

Die effektiven Zustandsdichten beider Energiebänder sind i.a. verschieden voneinander, weil die effektiven Massen der Elektronen m_n^* und die der Löcher m_p^* nicht übereinstimmen. Diese Unterschiede ergeben sich (ohne Vorzeichenberücksichtigung) aus der unterschiedlichen Bandkrümmung des $E(k)$ -Verlaufs für Valenz- und Leitungsband. Detailliert ist dies durch Bandstrukturrechnungen für kristallines Germanium in Abb. 7 ersichtlich.

Mit der Näherung der effektiven Masse kann der Ladungsträger als quasi-freies Teilchen beschrieben werden. Die effektive Masse weicht von der Masse des freien Elektrons ab und ist im Allgemeinen richtungsabhängig, also ein Tensor. Diese Anisotropie wird besonders deutlich in Abb. 8. Hier sind alle verfügbaren Zustände k bei einer definierten Energie E im dreidimensionalen Raum dargestellt. Die entstehende Struktur $k(E = const.)$ wird FERMI-Fläche genannt. Bei einer isotropen, in alle Richtungen identischen effektiven Masse, würde die Fermifläche einer Kugel entsprechen. In realistischen Systemen hängt die effektive Masse o.B.d.A. von der Transportrichtung ab. Folglich hat die Fermifläche mindestens die Form eines Ellipsoids, häufig eine noch komplexere Gestalt.

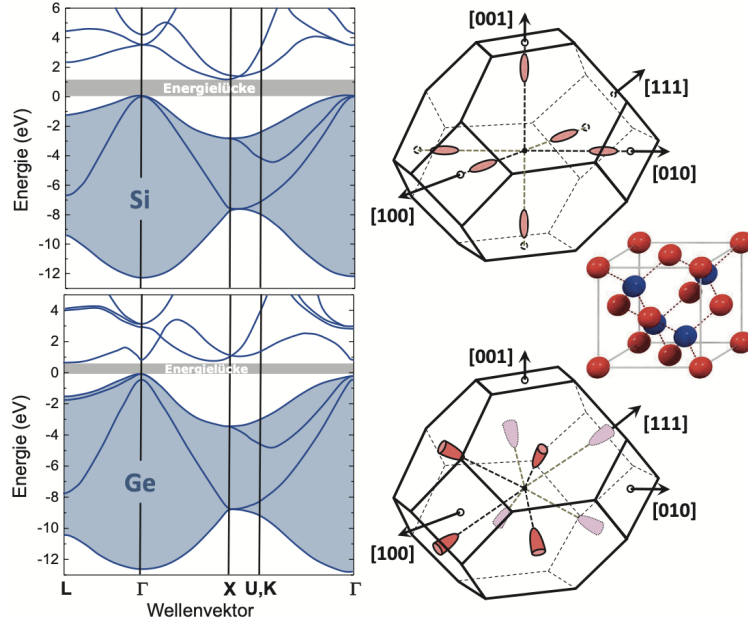


Abbildung 8: Elektronische Bandstruktur von Germanium von Silizium (oben) und Germanium (unten) mit den dazugehörigen Fermi-Flächen für eine leichte n-Dotierung, d.h. das chemische Potential liegt leicht im Leitungsband oberhalb der Bandlücke.

Die Abweichung ist umso größer, je stärker die potentielle Energie (als vernachlässigte Größe) auf die Elektronenbewegung einwirkt. Setzt man $m_n^* = m_p^* = m_0$ und $T = 300 \text{ K}$, dann ist die effektive Zustandsdichte in Gleichungen (33) und (34) $N_C = N_V = 2,45 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Für Germanium dagegen ist für die Oberkante des Valenzbandes (siehe Abb. 7, Abb. 8: Γ ; Entartung) $N_V = 6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, für die Unterkante des Leitungsbandes $N_C = 1,04 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Formal ist also ein überraschendes Ergebnis zu erkennen: $m^* < m_0$. Eigentlich hätte man wegen der quasi-freien Teilchen $m^* > m_0$ erwartet, so wie es für Metalle auch zutrifft. Multipliziert man Gl. (33) mit Gl. (34) so erhält man

$$n \cdot p = N_L \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_L - E_V}{k_B T}} \quad (35)$$

Mit

$$n \cdot p = n_i^2 \quad (36)$$

ergibt sich die Eigenleitungskonzentration n_i des Halbleiters, die von den charakteristischen Halbleiterdaten und der Temperatur abhängt:

$$n_i \approx 4,9 \cdot 10^{15} \cdot (m_n^* \cdot m_p^*)^{\frac{3}{4}} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad (37)$$

Nach Abb. 5 und Gl. (30) gilt bei einem Elektronenübergang vom Valenzband in das Leitungsband über die Energieschwelle E_g : $n = p$. Mit der Eigenleitungskonzentration

n_i ist damit

$$\sigma = e \cdot n_i \cdot (\mu_n + \mu_p) \quad (38)$$

und charakterisiert den Zustand der Eigenleitung (intrinsischer Halbleiter).

Zu Beginn des Experimentes untersuchen wir die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit. Wegen Gl. (37) und Gl. (38) interessiert in diesem Zusammenhang die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit der Ladungsträger: $\mu = e\tau/m$ (nach Gleichungen (18) und (20)). Beschreibt man die Streuung der Elektronen an den Gitterschwingungen als Elektron-Phonon-Kollision, dann gilt mit Gl. (21) $\mu = e\Lambda/mv$. Da vereinfacht v proportional $T^{1/2}$ ist, bleibt noch die Betrachtung der Temperaturabhängigkeit der freien Weglänge Λ . Sie ist umgekehrt proportional zur Zahl der Streuer, also zur Phononenkonzentration. Diese ist für Temperaturen $T > 100$ K proportional zur Temperatur T . Also gilt $\Lambda \propto 1/T$. Daraus folgt eine Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit begrenzt durch Phononen zu

$$\mu \propto T^{-3/2} \quad (39)$$

Bei sehr niedrigen Temperaturen werden konsequenterweise weniger Gitterschwingungen angeregt und die Streuung an jenen nimmt ab. Hier kann die Streuung von Ladungsträgern an (geladenen) Störstellen dominant werden. Diese ist proportional zu $T^{+3/2}$. Nach der MATTHIESSENSchen Regel addieren sich die Streuwahrscheinlichkeiten, sprich die Reziproken der Relaxationszeiten, von unabhängigen Streuprozessen. Dies führt dazu, dass es Temperaturregime geben kann, in dem der eine oder andere Streuprozess dominiert bzw. sich gegenseitig aufheben. Letzteres ist in Abb. 9 dargestellt.

In (38) hebt sich nun die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit vor dem Exponentialausdruck gegeben durch Gl. (37) unter Verwendung von Gl. (39) auf. Trägt man $\ln(\sigma)$ gegen $10^3/T$ auf, erhält man die Breite E_g der verbotenen Energiezone zwischen Valenzband und Leitungsband.

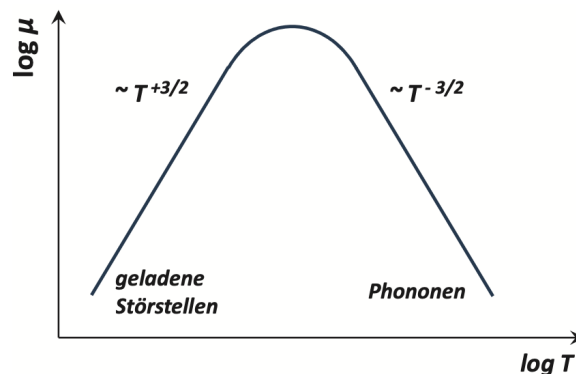


Abbildung 9: Schematische Darstellung des Einflusses von unterschiedlichen Streuprozessen auf die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgermobilität.

Aus theoretischen Rechnungen kennt man die effektiven Massen von Germanium. Aus den Halbachsen der Fermiflächen-Ellipsoide lassen sich die Krümmungen der Bänder, sprich die effektiven Massen ermitteln. Für Germanium ergeben sich für Elektronen am Leitungsbandminimum entlang ΓL

$$m_l^* = 1.64 \cdot m_0 \text{ und } m_t^* = 0,082 \cdot m_0 \quad (40)$$

und für Löcher im Brillouinzonezentrum Γ

$$m_{lh}^* = 0,044 \cdot m_0 \text{ und } m_{hh}^* = 0,28 \cdot m_0 . \quad (41)$$

Hierbei sind m_l^*, m_t^* jeweils die longitudinalen und transversalen Massen des Fermiflächenellipsoids im Leitungsband (vgl. Abb. 8 rechts), bzw. die kleinere und größere Masse im Valenzband: m_{lh}^*, m_{hh}^* (*engl. light hole, heavy hole*). Das dritte abgespaltete Band im Valenzband (*engl. spin-orbit split-off band*) wird hier vernachlässigt, da es weit genug von der Bandkante entfernt ist und folglich nur marginal besetzt werden kann.

Die effektiven (Zustandsdichte)-Massen lassen sich nun durch

$$\begin{aligned} m_n^* &= N_{deg}^{2/3} (m_l \cdot m_t \cdot m_t)^{1/3} \\ m_p^* &= 1 \cdot \left(m_{lh}^{3/2} + m_{hh}^{3/2} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (42)$$

bestimmen. Man sieht, dass es sich lediglich um eine geometrische Mittelung der einzelnen Massen handelt. Der Faktor $N_{deg}^{2/3}$ gibt die Anzahl der Entartung an, d.h. wie oft ein Element in der Fermifläche bei gleicher Energie auftritt. Wir sehen in Abb. 8 rechts unten, dass die Fermiflächenellipsoide im Leitungsband 8 mal auftreten, jeweils aber nur halb in der ersten Brillouinzone liegen: es ergibt sich $N_{deg} = 8/2 = 4$. Zum Vergleich ergibt sich für Silizium (Abb. 8 rechts oben) $N_{deg} = 6$. Das Maximum des Valenzbandes liegt für Germanium und Silizium am Brillouinzonezentrum und es gilt deshalb $N_{deg} = 1$. Aus Gl. (42) ergeben sich nun die *isotropen* effektiven (Zustandsdichte)-Massen zu

$$m_p^* = 0,29 \cdot m_0 ; m_n^* = 0,56 \cdot m_0 \quad (43)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir für den intrinsischen Fall eine Zweibandleitung an, d.h. Elektronen und Löcher tragen thermisch angeregt gleichermaßen zum elektronischen Transport bei. Mit den Werten aus Gl. (43) kann dann aus Gl. (37) die intrinsische Ladungsträgerdichte berechnet werden. Der Zahlenfaktor in Gl. (37) enthält bereits m_0 , so dass von Gl. (43) nur die reinen Zahlenwerte eingesetzt werden müssen.

Als Hinweis sei angemerkt, dass für die explizite Berechnung von Transportgrößen andere effektive Massen, die sogenannten Leitfähigkeits- (oder auch Transport-) effektive Massen verwendet werden müssen. Diese beziehen explizit die Transportrichtung entlang bestimmter Richtungen im Kristall und somit entlang der Halbachsen der Ellipsoide mit ein.

3 Störstellenhalbleiter

Durch Einbringen von Störstellen in einen Halbleiterkristall können die elektrischen Eigenschaften (reiner) Halbleiter beeinflusst werden. Störstellen sind Fremdatome, welche sich in ihrer Wertigkeit von den Atomen des Wirtsmaterials unterscheiden. Halbleiterbauelemente bestehen aus gezielt verunreinigten (dotierten) Kristallen.

Verunreinigungsatome mit 5 Außenelektronen (PSE-Gruppe 15, Donatoren: P, As, Sb) substituieren partiell 4-wertiges Germanium (Silizium) aus der PSE-Gruppe 14 im Kristallgitter. Das für die chemische Bindung im Ge-Wirtsgitter überflüssige Elektron ist deshalb schwächer an den Atomrumpf gebunden und kann einfacher zum Transport beitragen. Verunreinigungsatome mit 3 Außenelektronen (PSE-Gruppe 13, Akzeptoren: B, Ga, In) substituieren partiell 4-wertiges Germanium (Silizium) im Kristallgitter und führen ein fehlendes Elektron in der Bindung ein. Dieses Defektelektron ordnet man dem Loch zu. Diesem Ortsraum-Bindungs-Bild kann natürlich auch ein Bandstruktur-Bild Abb. 10 zugeordnet werden.

Die energetische und die lokale Situation kann man grob aus dem Wasserstoffmodell abschätzen. Dieses Modell betrachtet das Donatoratom als ein positiv geladenes Ion mit einem zusätzlichen Elektron, das sich ähnlich wie ein Elektron im Wasserstoffatom verhält, allerdings in der Kristallstruktur des Halbleiters. Man beschreibt das Störatom durch ein Ge-Atom und ein H-Atom in einer Ge-Matrix mit der relativen Permittivität $\epsilon_r = 16$. Die Aktivierungsenergie für den Grundzustand ist dann vereinfacht $E_D \approx 13,6eV/\epsilon_r^2 \approx 0,05eV$. Die Verkleinerung der potentiellen Energie gegenüber der im

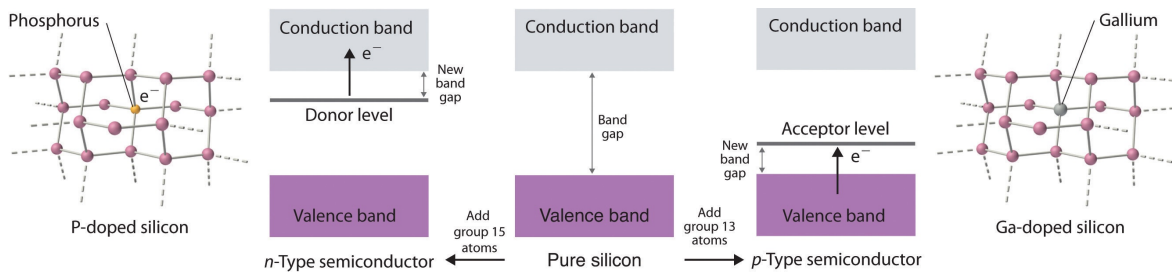


Abbildung 10: (links) Dotiert man Silizium oder Germanium mit einem Element aus der 15. PSE-Gruppe führt man einen neuen Quantenzustand, ein Energieband, zwischen Valenz- und Leitungsband in der Bandlücke des undotierten Halbleiters (mitte) ein. Diese neue, kleinere Bandlücke, E_D ermöglicht nun eine günstigere energetische Anhebung in das unbesetzte Leitungsband. Der elektrische Transport wird begünstigt. (rechts) Analog führt eine Dotierung mit einem Element aus der 13. PSE-Gruppe zu einem neuen (Loch-)Niveau nahe des Valenzbandes mit zugeordneter Aktivierungsenergie E_A .

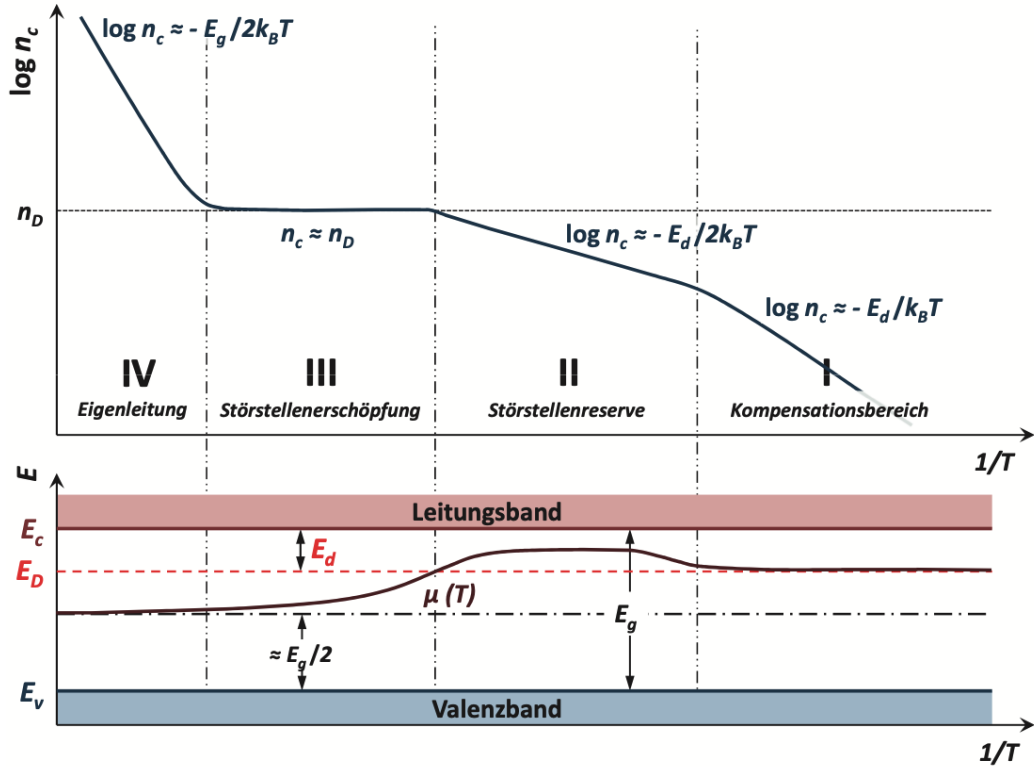


Abbildung 11: Temperaturverlauf der Ladungsträgerdichte n und des chemischen Potentials μ in einem dotierten n-Typ Halbleiter. Im Bereich I liegt Störstellenkompensation durch eine endliche Akzeptordichte vor, im Bereich II dominiert reine Störstellenleitung, im Bereich III der Störstellenerschöpfung sind sämtliche Störstellen ionisiert, so dass die Ladungsträgerdichte etwa konstant bleibt, und im Bereich IV tritt die Eigenleitung gegenüber der Störstellenleitung in den Vordergrund.

isolierten H-Atom bewirkt auch eine Ausdehnung des Orbitals auf das ϵ_r -fache. Wegen der geringen Aktivierungsenergie liegen die Donatorniveaus nun dicht unter der unteren Leitungsbandkante (siehe links in Abb. 10).

Die Donatoren emittieren daher bereits bei niedrigen Temperaturen ($T < 100$ K) Elektronen in das Leitungsband. Nach dem Massenwirkungsgesetz für Halbleiter Gl. (36) reduziert sich die Zahl der Löcher, so dass $n \gg p$ wird (n-Halbleiter). Analog zu Gl. (35) erhält man die Elektronenkonzentration n im Leitungsband nach Emission aus den Donatoren zu:

$$n = \sqrt{N_D \cdot N_L} \cdot e^{-\frac{E_D}{2k_B T}} \quad (44)$$

Durch die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration $n(T)$, bzw. der Messgröße der Leitfähigkeit $\sigma(T)$ lässt sich so auch das Störstellenniveau E_D bestimmen.

Wird die Donatorkonzentration N_D so groß, dass sich die Störstellen-Orbitale überlappen, entsteht aus den lokalisierten Donatorniveaus ein Störstellenband. Die bei tiefen Temperaturen einsetzende Störstellenemission wird bei höheren Temperaturen durch die Valenzbandemission (Eigenleitung) fortgesetzt. Die verschiedenen temperaturabhängigen Szenarien sind in Abb. 11 dargestellt.

Im p-Leiter sind die Elektronen die Minoritätsladungsträger. Durch entsprechende Dotierungen gelingt es, die in Gl. (38) auftretenden drei Unbekannten auf zwei zu reduzieren. Übrig bleiben dann jeweils eine Ladungsträgerkonzentration und eine Beweglichkeit. Im Zusammenhang mit der Störstellenschöpfung ist noch der Erwähnung wert, dass auch Halbleiter ein metallisches $\rho(T)$ -Verhalten zeigen können. Im Gegensatz zur Nichtentartungsnaheung bei sehr leicht dotierten Halbleitern, spricht man dann von entarteten (*degenerated limit*) Halbleitern oder hochdotierten Halbleitern. Hier liegt das Fermi-Niveau tief im Leitungs- oder Valenzband, zumeist mehrere 100 meV von den Bandkanten entfernt.

Um Ladungsträgerkonzentration und Beweglichkeit bestimmen zu können, benötigt man neben der elektrischen Leitfähigkeit noch ein zweites Messverfahren. Das liefert uns der HALLeffekt, welcher fortfolgend beschrieben wird.

4 Der Hall-Effekt

Die Messanordnung ist in der Abb. 12 für einen n-dotierten und p-dotierten Halbleiter dargestellt. Die folgenden Herleitungen beziehen sich auf den Fall der Lochleitung. Das Magnetfeld (Flussdichte B_z) liegt senkrecht zum Löcherstrom (Stromdichte j_x). Durch die Lorentzkraft werden die driftenden Ladungsträger ($+e$), die sich in Feldrichtung $E_x = U_x/L$ bewegen, in Stromrichtung gesehen, nach links abgelenkt. Man beachte das B_z in negative z -Richtung orientiert ist.

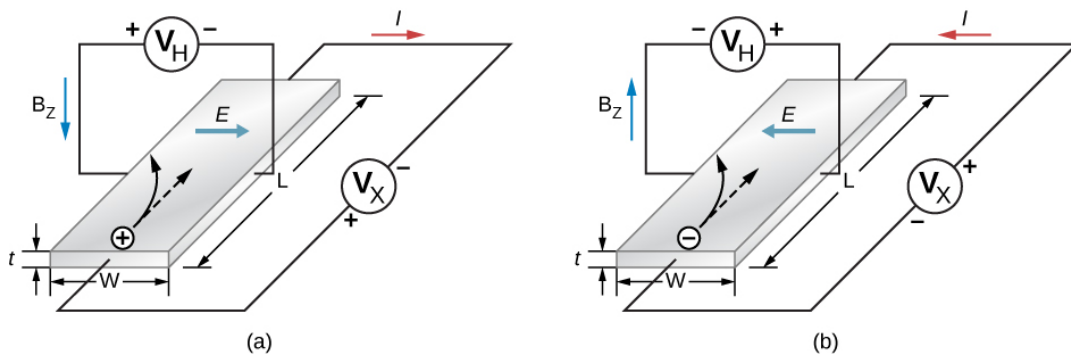


Abbildung 12: Schematische Darstellung der Messung des Hall-Effektes für eine a) p-dotierte und b) n-dotierte Halbleiterprobe.

Dadurch entsteht ein elektrisches Feld $E_y = E_H = U_H/w$ (HALL-Feld nach Edwin HALL). Die Feldkraft kompensiert die Wirkung der Lorentzkraft

$$e \cdot E_y = e \cdot \langle v_x \rangle \cdot B_z \quad (45)$$

Mit Gl. (10), allerdings mit positivem Vorzeichen, (p als Löcherkonzentration), ist

$$\frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{e \cdot p} \quad (46)$$

Das HALL-Feld ergibt sich also zu

$$E_H = E_y = R_H \cdot B_z \cdot j_x \text{ mit} \quad (47)$$

$$R_H = \frac{1}{e \cdot p} \quad (48)$$

als HALL-Koeffizient. Im n-Störstellenhalbleiter verändert sich sowohl das Vorzeichen der Ladungsträger als auch das Vorzeichen der Driftgeschwindigkeit. Beachten Sie die Richtung der Feld- und Stromrichtungen in Abb. 12b). Unter Beachtung von Gl. (10) ist dann analog zu Gl. (46)

$$\frac{E_y}{B_z j_x} = \frac{1}{e \cdot n} \quad (49)$$

Die Ablenkung der Elektronen erfolgt also in die gleiche Richtung wie für Löcher. Der Unterschied besteht darin, dass E_y jetzt in negativer y-Richtung orientiert ist. Demnach gilt für n-Leitung:

$$E_H = E_y = -R_H \cdot j_x \cdot B_z \quad (50)$$

mit einem negativen HALL-Koeffizienten. Nach Gl. (38) ist für einen p-Störstellenhalbleiter die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot p \cdot \mu_p . \quad (51)$$

Daraus folgt mit Gl. (48)

$$\sigma \cdot R_H = \mu_p . \quad (52)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich μ_n bestimmen. Da die Ablenkung der Ladungsträger vorzeichenunabhängig ist, wird das HALL-Feld bei Eigenleitung wesentlich kleiner. Der HALL-Koeffizient ergibt sich zu

$$R_H = \frac{A}{e} \cdot \frac{p \cdot \mu_p^2 - n \cdot \mu_n^2}{(p \cdot \mu_p + n \cdot \mu_n)^2} . \quad (53)$$

A ist dabei ein, zu Teilen empirischer, Streufaktor, der sich durch die unterschiedliche Streumechanismen der Ladungsträger ergibt. Für große Felder kann er mit $A = 1$ angenähert werden.

5 Magnetwiderstand

Eine weitere Messgröße in der Anordnung des HALL-Effektes ist der positive Magnetwiderstand (nicht zu verwechseln mit den z.B. spin-sensitiven Magnetowiderstandseffekten GMR (*giant magnetoresistance*) oder TMR (*tunnel magnetoresistance*)). Man beobachtet hierbei eine positive Veränderung (Erhöhung) des longitudinalen Widerstandes unter Einfluß eines externen Magnetfeldes. Bezüglich des spezifischen Widerstandes ρ_0 ohne Magnetfeld erwartet man eine Änderung

$$\rho(B) = \frac{E_x}{j_x} \quad (54)$$

Eine exakte mikroskopische, d.h. quantenmechanische Beschreibung dieses Effektes ist äußerst anspruchsvoll, weswegen wir uns hier einer quasi-klassischen Interpretation des Effektes bedienen. Ohne Magnetfeld bewegen sich die Elektronen auf relativ geraden Bahnen zwischen den Stößen mit Störstellen oder Phononen, wie vereinfacht in Abb. 13a) abgebildet. Die Kompensationswirkung des Hall-Feldes auf die Lorentzkraft Gl. (47) gilt aber nur für die mittlere Geschwindigkeit in der Verteilung. Mit Magnetfeld hingegen bewegen sie sich, wie klassisch erwartet, auf LANDAU-Bahnen mit Radius $R_c = \frac{vm}{eB}$ und Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m$ (siehe Abb. 13b)). Nur bei extrem niedrigen Temperaturen und bei extrem hohen Magnetfeldern sind vollständige Umläufe in den LANDAU-Bahnen zu erwarten.

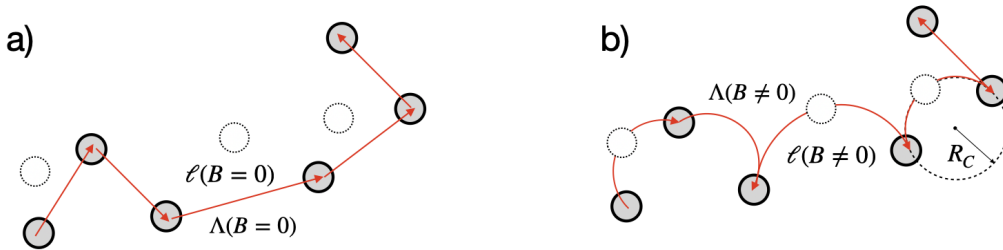


Abbildung 13: Driftbewegung von Elektronen zwischen Stößen mit Störstellen ohne (a) und mit (b) Magnetfeld. Zu sehen sind in (b) Ablenkungen der Elektronen auf kreisförmige aber unvollständige Landau-Bahnen. Vollständige Umläufe auf LANDAU-Bahnen sind nur bei sehr niedrigen Temperaturen, sehr reinen Proben oder extrem hohen Magnetfeldern zu erwarten.

Diese Krümmung unter Magnetfeld führt zu einer Vergrößerung des Transportweges ℓ und damit erhöht sich statistisch die Wahrscheinlichkeit auf Störstellen treffen zu können. Dadurch steigt die Kollisionsrate, was zu einer reduzierten mittleren freien Weglänge Λ führt. Desweiteren gilt, dass die Elektronen, während sie sich auf ihrer Kreisbahn bewegen, nicht direkt zur Stromleitung in Feldrichtung beitragen: $j_D \nparallel j_x$. Die effektive

Driftgeschwindigkeit sinkt also im Vergleich zur Situation ohne Magnetfeld. Das bedeutet, dass die Ladungsträger langsamer durch das Material driften und dadurch häufiger mit Störstellen kollidieren können. Beide Argument führen direkt zu einer Verringerung der spezifischen Leitfähigkeit nach Gleichungen (21) und (22) und damit zu einer Erhöhung des Widerstandes. Der Magnetowiderstand nimmt mit zunehmender Temperatur stark ab, da Elektron-Phonon-Streuung zu dominieren beginnt.

Besondere Effekte kann man natürlich auch im Fall der Eigenleitung erwarten, da dort das HALL-Feld durch Selbstkompensation sehr klein ist. Für die überwiegend kovalente Bindung der Elementhalbleiter gelten die folgende KOHLER-Relationen [7] zwischen den spezifischen Widerständen ρ_B im Magnetfeld bzw. ρ_0 ($B=0$) und den Beweglichkeiten der Ladungsträger sowie dem Magnetfeld B :

$$1) \text{ Eigenleitung: } \frac{\rho_B - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{9\pi}{16} \cdot \mu_n \cdot \mu_p \cdot B^2 \quad (55)$$

Der linke Term in Gl. (55) wird üblicherweise Magnetowiderstand genannt.

$$2) \text{ Störstellenleitung: } \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\pi}{10} \cdot \mu^2 \cdot B^2 . \quad (56)$$