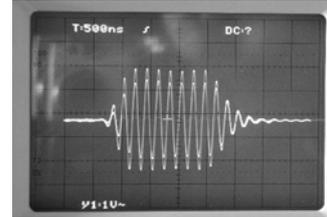




Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
FB Physik

## Fortgeschrittenen- Praktikum

Stand: 05/2020



# B09: Schallausbreitung im Festkörper

An verschiedenen isotropen und anisotropen Materialien sollen die Schallgeschwindigkeiten mit der Impulsüberlagerungsmethode bei einer Ultraschallfrequenz von ca. 5 MHz ermittelt und daraus die Koeffizienten der linearen elastischen Materialeigenschaften berechnet werden. Weiterhin sind die Dämpfungen der Schallwellen zu ermitteln.

### 1. Isotrope Materialien

- polykristallines Kupfer
- Sinterkorund ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )
- Torgauer Flachglas oder Bleiglas
- Polymethylmethacrylat (PMMA, bekannt als Plexiglas)

### 2. a) Kupfereinkristall (kubische Symmetrie)

mit den zusätzlichen Aufgaben

- Bestimmung der Kristallorientierung
- Vergleich der Einkristalldaten mit denen der polykristallinen Kupferprobe

### b) Korund-Einkristall ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ , trigonale Symmetrie)

- Aufgaben analog zu 2. a), Messung aller entsprechend des Kristallschnitts möglichen Schallgeschwindigkeiten

Diese wegen der niedrigeren Kristallsymmetrie von  $\text{Al}_2\text{O}_3$  aufwendigere Messung ist eine fakultative Zusatzaufgabe.

## Allgemeine Literatur

- [1] V. A. Šutilov „Physik des Ultraschalls“, Akademie-Verlag, Berlin 1984  
- für Angehörige der Uni Halle im ULB-OPAC-Katalog herunterladbar  
Link: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-8750-0>
- [2] H. Kuttruff „Physik und Technik des Ultraschalls“, Verlag Hirzel, Stuttgart 1988  
(Signaturen Ha4: TE 1992:1321/1, TE 1989:1161/1, ULB: 89 A 2642)
- [3] G. Sorge „Faszination Ultraschall“, Teubner, Stuttgart Leipzig 2002  
- für Angehörige der Uni Halle über ULB Fachdatenbanken  
(Physik > Springer Book Archive: Naturwissenschaften) herunterladbar  
Link: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-80046-6>
- [4] A. S. Sonin, B. A. Strukow „Einführung in die Ferroelektrizität“, Akademie-Verlag, Berlin 1974 (Signatur in ULB/Ha 4: UP 4700 130)
- [5] C. Kittel „Einführung in die Festkörperphysik“, Oldenburgverlag München Wien, z.B. 13. Auflage 2002
- [6] C. Weißmantel, C. Hamann „Grundlagen der Festkörperphysik“, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979

## Kontrollfragen

- Worin besteht der entscheidende Vorteil des Impulsüberlagerungsverfahrens gegenüber der normalen Echoimpuls-Laufzeitmessung bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit?
- Welche Funktion haben Triggerung und Z-Steuerung beim Kathodenstrahl-Oszilloskop? Erläutern Sie die Verfahren.  
→Hinweise zum Kathodenstrahl-Oszilloskop im Allgemeinen findet man im Anhang des Versuchsbeleghefts „Grundpraktikum Physik III und IV“ des Grundpraktikums [http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit\\_oszilloskop.pdf](http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit_oszilloskop.pdf)
- Erläutern Sie das verallgemeinerte Hookesche Gesetz.
  - Wie leitet es sich aus dem ursprünglichen Hookeschen Gesetz „Längenänderung ist proportional der Kraft“ ab?
  - Was bedeuten z.B. die Komponenten  $T_{22}$ ,  $T_{13}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{23}$  des mechanischen Spannungs- bzw. Dehnungstensors (makroskopische Definition)?
  - Welche Eigenschaften beschreiben die Koeffizienten  $c_{1123}$  und  $c_{41}$  (Voigtsche Notation!) des elastischen Tensors?
- Welche verschiedenen mechanischen Wellentypen (Moden) können sich im Festkörper ausbreiten?
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der experimentell bestimmten Schallgeschwindigkeit und den elastischen Materialkoeffizienten. Welche Rolle spielt dabei die Christoffelgleichung?
- Welche Polarisationsrichtungen der Transversalwelle ergeben bei einem Kristall kubischer Symmetrie reine Moden für die Ausbreitungsrichtung (Phasengeschwindigkeit) a) in [110]-Richtung, b) in [111]-Richtung?
- Wodurch sind die ferroelektrische und paraelektrische Phase von Kristallen charakterisiert und erläutern Sie den Begriff Ordnungsparameter.

## 1. Hinweise zu den Aufgaben

- zu 1.** Neben den Komponenten des Steifigkeitstensors sind bei den isotropen Proben auch der E-Modul, der Schermodul und die Poisson-Zahl zu ermitteln. Falls bei bestimmten Proben die Dämpfung (insbesondere der Transversalmoden) nicht vernünftig bestimmbar ist, erläutern Sie dies und begründen die Ursachen.

Achtung! Bitte nicht vergessen:

Wegen der generellen Frequenzabhängigkeit der ermittelten Stoffgrößen muß die bei den Messungen verwendete Ultraschallfrequenz (nur näherungsweise 5 MHz) möglichst präzise bestimmt und mitgeteilt werden.

Probendichten ( $\text{g/cm}^3$ ):

Kupfer	8,94
Sinterkorund	3,97
Torgauer Flachglas	2,48
PMMA	1,18

**zu 2. a)**

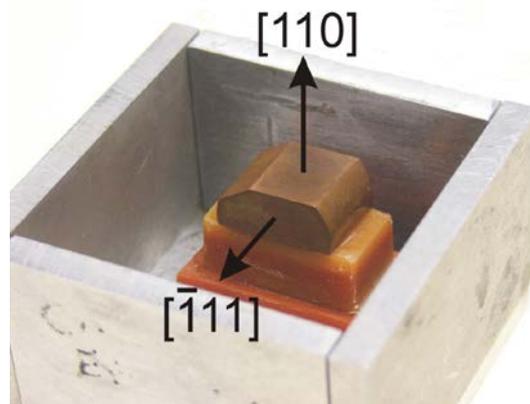


Abb. 1: Kupfer-Einkristall

Die Probendichte beträgt  $8,94 \text{ g/cm}^3$ . Der Einkristall liegt als  $[110]$ -Schnitt mit einer Dicke von  $8,67 \text{ mm}$  vor. Er wurde auf die größere  $(110)$ -Fläche aufgeklebt, da er relativ weich ist und stärkere mechanische Belastungen wie z.B. Stöße vermieden werden müssen. Er ist in der Züchtung aufwendig und daher recht wertvoll.

In  $[110]$ -Richtung lassen sich drei verschiedene Schallgeschwindigkeiten messen (eine reine longitudinale und zwei verschiedene reine transversale Moden). Bestimmen Sie dabei die weiteren Kristallachsenrichtungen des vorliegenden Einkristalls mittels Auffinden „reiner“ Transversalmoden. Diese Richtungen können z.B. mit einer Digitalkamera dokumentiert und danach die entsprechenden Winkel vermessen werden. Die Winkelmessung ermöglicht es überhaupt erst, die gemessenen Transversalmoden (FT, ST) den beiden transversalen Lösungen der Christoffelgleichung eindeutig zuzuordnen. Erläutern Sie diese Zuordnung.

**Zur Kontrolle soll die longitudinalen Mode auch in der zu  $[110]$  senkrechten  $[\bar{1}11]$ -Richtung (Dicke  $14,91 \text{ mm}$ ) vermessen und mit der aus den elastischen Koeffizienten berechneten Geschwindigkeit verglichen werden.** Warum würden die Meßdaten dieser Richtung allein nicht ausreichen, um alle drei elastischen Konstanten zu bestimmen?

Zum **Vergleich der Einkristalldaten mit denen der polykristallinen Probe** müssen zunächst die isotropen elastischen Koeffizienten aus den Einkristalldaten näherungsweise berechnet werden. Siehe dazu das Lehrbuch Kristallphysik von Voigt [8], Anhang II. §§ 469-472. Unter welchen Voraussetzungen sind diese Näherungsformeln überhaupt sinnvoll? Diskutieren Sie diese Voraussetzungen für die vorliegenden Proben. Die Kristallitgröße der polykristallinen Cu-Probe beträgt etwa 1  $\mu\text{m}$ .

zu 2. b)

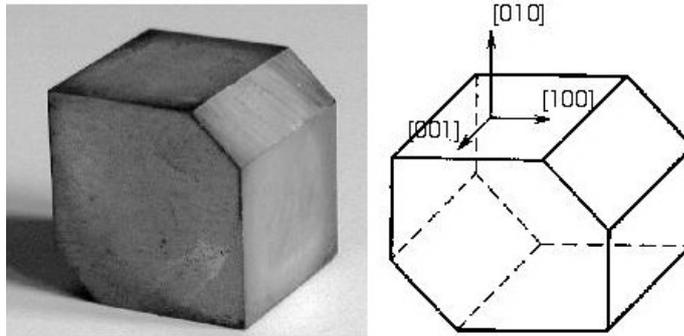


Abb. 2: Korund-Einkristall

Der Korund-Einkristall (Dichte  $3,97 \text{ g/cm}^3$ , Punktgruppe  $\bar{3}m$ ) ist leider ungünstig geschnitten, so daß der elastische Koeffizient  $c_{13}$  nicht bestimmt werden kann. Statt des hier vorliegenden Schnittes mit der Flächennormale in  $[110]$ -Richtung wäre ein  $45^\circ$ -Schnitt mit  $[011]$ -Richtung notwendig. Hinweise zu den elastischen Konstanten von Kristallen der Symmetrie  $\bar{3}m$  findet man in [9].

Wegen des vollkommen symmetrischen Kristallschnittes sind die Richtungen  $[100]$  und  $[010]$  nicht von vornherein bekannt. (Die gegenteilige Aussage wird durch die Skizze in Abb. 2 suggeriert.) Auch hier kann man aber diese Richtungen identifizieren, indem man die „reinen“ Transversalmoden auffindet, deren Polarisationsrichtungen relativ zu den Kristallkanten sich für die Ausbreitungsrichtungen  $[100]$  und  $[010]$  unterscheiden.

Zum Vergleich der Meßergebnisse zwischen polykristalliner Probe (Sinterkorund) und Einkristall siehe die Bemerkungen zum Kupfereinkristall. Da der für die Mittelung der Einkristalldaten benötigte Koeffizient  $c_{13}$  nicht bestimmbar ist, könnte hierzu der in [9] zitierte Literaturwert genommen werden.

**zu 3.** Die Probendicke beträgt 9,04 mm, die Dichte  $5,70 \text{ g/cm}^3$  (Einkristalldichte von  $\text{BaTiO}_3$ :  $6,02 \text{ g/cm}^3$ ). Die Probe mit aufgeklebtem Schallwandler ist in einer mit einem Widerstand (5 Ohm) beheizten Probenkammer eingebaut. Zur Temperaturmessung und -regelung (Eurotherm-Regler) wird ein NiCr/Ni-Thermoelement verwendet. Als Leistungssteller dient ein steuerbares Gleichspannungsnetzteil (Maximalstrom: 2 A). Die Meßkurve wird mit fallender Temperatur aufgenommen (warum?). In der Nähe der Phasenumwandlung der Probe (siehe z.B. Sonin/Strukov [4], S. 83) sind die Abstände der Meßpunkte stark zu verringern, um eine vernünftige Auflösung der Meßkurve zu erhalten. Bei jedem neuen Meßpunkt (Temperatur) ist hinreichend lange zu warten, bis sich die voluminöse Probe und das Thermoelement im thermischen Gleichgewicht befinden. Je nach Größe des Temperaturschrittes kann in unmittelbarer Nähe der Phasenumwandlung die Wartezeit nach dem Erreichen der Solltemperatur am Regler noch mehrere 10 Minuten betragen. Entscheidend ist die Konstanz der entsprechenden Meßgröße über eine längere Zeit.

Zur **Ermittlung der Steifigkeitskoeffizienten** aus den gemessenen Schallgeschwindigkeiten muß die zur Christoffelgleichung gehörige charakteristische Gleichung (19) gelöst werden. Die Zuordnung der drei Lösungen (Eigenwerte) dieser Gleichung zu den einzelnen Schallwellenmoden (L, FT, ST) geschieht über die Berechnung der Eigenvektoren (Vektoren der Teilchenverschiebungsamplitude). Siehe dazu auch z.B. [1, 6, 7].

Die Christoffelgleichung kann man sehr elegant mit „Mathematica“ oder einem ähnlichen Programm lösen, da derartige Softwarepakete den Umgang mit Eigenwertproblemen standardmäßig implementiert haben.

Vorgehenshinweise: Man definiert zunächst den 4-stufigen elastischen Tensor der jeweiligen Symmetrie (isotrop, kubisch, trigonal) mit seinen zwei, drei bzw. sechs unabhängigen Koeffizienten. Dann erzeugt man den 2-stufigen Christoffel-Tensor durch zweimalige Tensormultiplikation mit dem Wellenvektor der Schallwelle (Richtungscosini des Wellenvektors). Diese Operation nennt man auch zweimalige Verjüngung des elastischen Tensors mit dem Wellenvektor (Tensor erster Stufe). Hierbei ist es wesentlich, daß entsprechend der Definition des Christoffeltensors (Anleitung, Kap. 5) die Verjüngung (Multiplikation) bezüglich des 2. und 4. Index des elastischen Tensors geschieht. Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren des Christoffel-Tensors (ct) erhält man nun durch die entsprechende Programmfunktion (Mathematica: Eigenvalues[ct], Eigenvectors[ct] bzw. Eigensystem[ct]).

Um rechentechnische Komplikationen zu vermeiden, sollte man dabei die Probedichte nicht mit in die Definition des Christoffel-Tensors aufnehmen. Für die Berechnung der Eigenvektoren spielt ein skalarer Faktor sowieso keine Rolle, und für die Berechnung der Schallgeschwindigkeiten aus den Eigenwerten kann man ihn nachträglich wieder einführen.

Bei der Bestimmung der **Wellendämpfung** prüfe man, inwieweit eine exponentielle Amplitudenabnahme gegeben ist. Die Werte sollen in der üblicherweise verwendeten Einheit dB/cm angegeben werden (Achtung: Bel bezieht sich nicht auf Amplituden- sondern auf Leistungs- bzw. Energieverhältnisse). Siehe dazu z.B. Šutilov [1], Kap. 3.4, S. 60ff.

### Allgemeine technische Hinweise

- Die Frequenz des Triggerfrequenzgenerators darf **keinesfalls 800 kHz überschreiten**, da dadurch (je nach Teilverhältnis und Burstdauer) der Ultraschallfrequenzgenerator thermisch überlastet werden kann. Dieser ist nicht für Dauersignal geeignet. Beim normalerweise nicht benötigten Teilverhältnis von 1:1 hätte man ein Dauersignal schon bei Frequenzen > 300 kHz und einer Burstdauer von 3 µs. Die unter allen Umständen zu vermeidende Überhitzung würde sich durch eine typische Geruchsentwicklung bemerkbar machen.
- Der probenseitige elektrische Kontakt der Ultraschallwandler ist als dünne Goldschicht aufgedampft. Die Schicht nutzt sich durch mechanische Beanspruchung ab, wodurch der Kontakt nach gewisser Zeit ausfällt und der Ersatzwandler benutzt werden muß. Teilen Sie diesen Fall unverzüglich dem Versuchsbetreuer mit, damit die defekte Kontaktschicht rasch erneuert werden kann.
- Beim Hantieren mit dem Koppelmedium Honig bitte sorgfältig auf Sauberkeit achten, um zu verhindern, daß der Honig über die Finger die Bedienelemente der Anlage kontaminiert. Das Vorratsgefäß ist nach Gebrauch sofort zu verschließen.

## 2. Meßverfahren

### 2.1. Hinweise zum Aufbau des Meßplatzes

Der Versuchsaufbau (Abb. 3, Blockschaltbild) erfolgte nach der Impulsüberlagerungsmethode [10], [11].

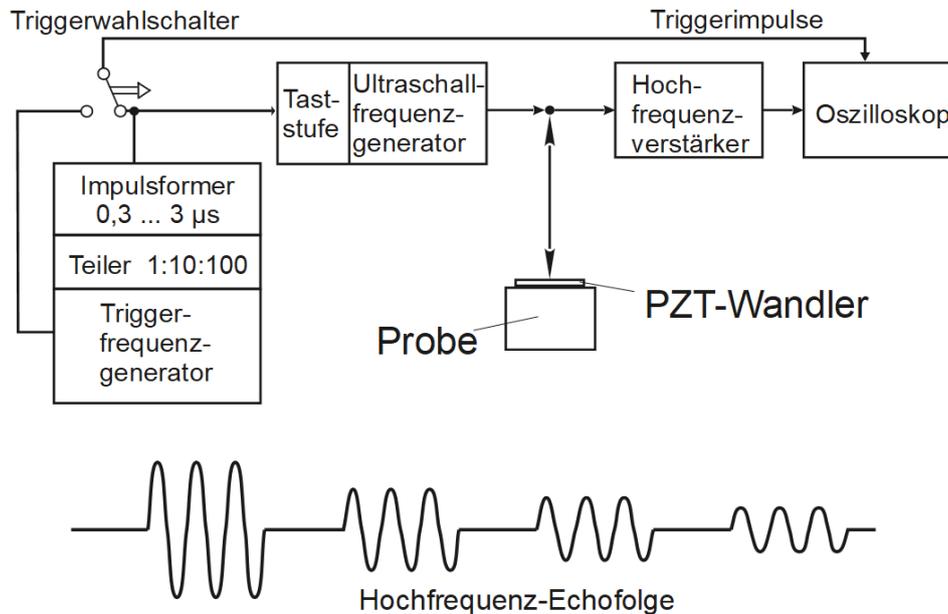


Abb. 3: Schematische Darstellung des Ultraschallmeßverfahrens

Hinweise zum Schaltungsaufbau:

- Der positive Nadelimpulsanfang des Triggerfrequenzgenerators (Abb. 4) wird mit der Buchse "Trigg. In" bzw. "Line In" (Umschalter) des Impulssteuergerätes (Abb. 5) verbunden.
- Diese Impulse werden gleichzeitig auch dem zweiten Eingang des Oszilloskops zugeführt.
- Die Messung der Niederfrequenz erfolgt durch Verbindung des Steckplatzes "Trig.Out, ZFM" des Niederfrequenzgenerators mit dem Frequenzzähler (sinusförmiges Signal).
- Das Signal "Trig.Out" des Impulssteuergerätes dient der externen Triggerung des Oszillografen. Es bestimmt, wann er mit der Darstellung des Signals beginnt.
- Die Ansteuerung des Ultraschallfrequenzgenerators erfolgt vom Ausgang "OUT neg." des Impulssteuergerätes zum "Eing.Trigger" des Generators. Der Ausgang des Hochfrequenzgenerators liegt an dessen linker Seite.
- Das Kabel von der Rückseite des Oszilloskops wird mit dem Ausgang "Z-OUT" des Impulssteuergerätes verbunden und dient der Hell-Dunkel-Tastung der Echofolge auf dem Oszilloskop.
- Das Oszilloskop muß auf externe Triggerung eingestellt sein. Als Triggerart ("TRIG.MODE") wird "AC" gewählt.



Abb. 4: NF-Generator



Abb. 5: Impulssteuergerät

## 2.2 Erläuterung des Verfahrens

Ein Niederfrequenzgenerator (Nutzfrequenzen 10 ... 700 kHz, **max. 800 kHz!**) mit nachfolgendem Frequenzteiler (10:1 bzw. 100:1) und angeschlossenem Impulsformer erzeugt Rechteckimpulse einstellbarer Pulsdauer (0,3  $\mu$ s bis 3  $\mu$ s) der geteilten Frequenz. Die Impulse steuern (triggern) einen Ultraschallfrequenzgenerator (ca. 5 MHz), der damit kurze Hochfrequenzimpulspakete (Bursts) dieser Pulsdauer erzeugt. Die Bursts werden durch den auf der Probe aufgesetzten Schallwandler aus gepolter piezoelektrischer Keramik infolge des reziproken Piezoeffekts in einen Schallimpuls umgewandelt. Der Schallimpuls durchläuft die planparallele Probe je nach Schalldämpfung mehrmals und erzeugt infolge des (direkten) Piezoeffekts ein elektrisches Empfangssignal, wenn er den Schallwandler erreicht. Als Schallwandler stehen zwei runde Longitudinalwandler (Dickenschwinger, ca. 5 MHz Mittenfrequenz) und ein rechteckiger Transversalwandler (Scherschwinger, ca. 5 MHz Mittenfrequenz) zur Verfügung.

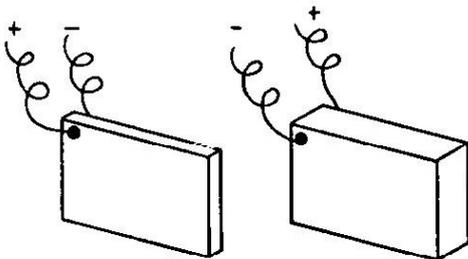


Abb. 6: Schema eines Longitudinalschallwandlers

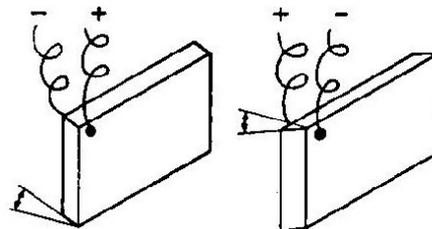


Abb. 7: Schema eines Transversalschallwandlers (Scherschwinger)

Die Scherung des Transversalschallwandlers erfolgt in Richtung der längeren Seite des Wandlers. Die akustische Ankopplung erfolgt bei Longitudinalwellen durch Wasser. Bei Transversalwellen muß ein viskoses (oder festes) Koppelmedium eingesetzt werden. Bei diesem Versuch wird dafür Honig verwendet.

Das durch den Schallwandler aufgenommene Signal wird durch einen Hochfrequenzverstärker im Pegel angehoben und auf einem Oszilloskop dargestellt. Der HF-Verstärker ist gegen die hohen Impulsspannungen der Sendeimpulse durch einen eingebauten Begrenzer geschützt. Seine Verstärkung läßt sich durch ein Potentiometer an der Frontseite stufenlos verändern.

Auf dem Oszilloskop ist im Idealfall eine exponentiell abfallende Echofolge zu sehen (Abb. 8).

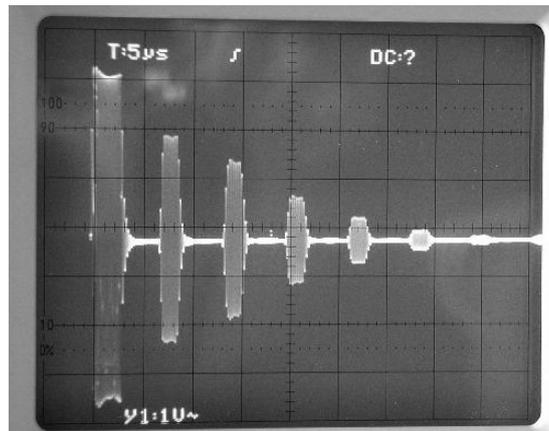


Abb. 8: Echofolge auf dem Oszillografen

Die Impulsüberlagerungsmethode nutzt nun die Überlagerung (Übereinanderschreiben) der Schallimpulse (Echos) auf dem Schirm eines Hochfrequenzoszillografen. Diese Überlagerung wird durch ein externes Triggersignal realisiert, das vom nicht geteilten Signal des Triggerfrequenzgenerators erzeugt wird und demzufolge ein Übereinanderschreiben der einzelnen Echos zur Folge hat. Durch Frequenzvariation des Triggerfrequenzgenerators (d.h. der Impulsfolgefrequenz des Triggersignals) lassen sich die Echos auf dem Oszilloskopbildschirm gegeneinander verschieben und damit die Maxima bzw. Nulldurchgänge ihrer HF-Signale zur Deckung bringen. In diesem Falle entspricht die Periodendauer des Triggersignals der Echolaufzeit bzw. ihrem Vielfachen. Aus Echolaufzeit und Probedicke wird dann die Schallgeschwindigkeit berechnet.

### 2.3 Der Phasenabgleich und die Z-Steuerung

Das die Überlagerungsmethode illustrierende Impulsdiagramm ist in Abb. 9 dargestellt.

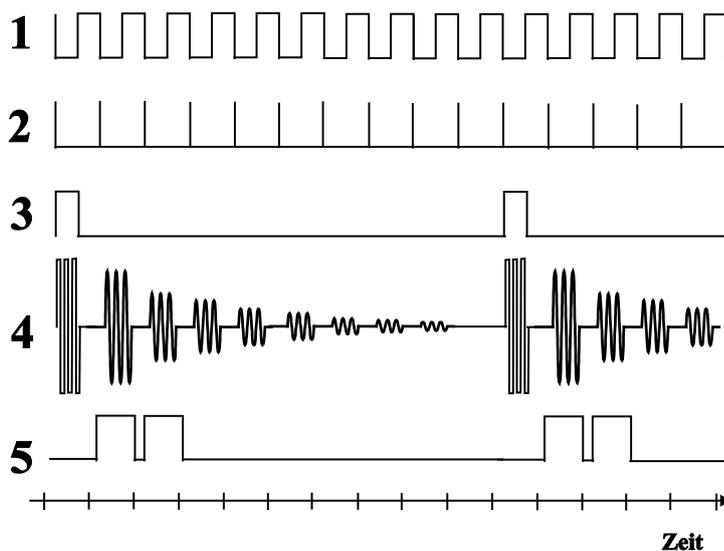


Abb. 9: Impulsdiagramm der Überlagerungsmethode

Die Impulsserie 1 stellt die ungeteilte Niederfrequenz dar. Nach jeweils 10 Perioden (auch 100 Perioden sind möglich, Frequenzteiler auf 10 bzw. 100, Blockschaltbild siehe Anhang, Abb. A1) dieser Frequenz wird ein neuer Sendeimpuls (Serie 3) abgegeben, der den Ultraschallfrequenzgenerator triggert. Impulsserie 2 stellt die aus Impulsserie 1 abgeleiteten Triggerimpulse (Nadelimpulse) dar. Bei der gezeigten Einstellung der Triggerfrequenz werden alle Echos auf dem Oszilloskop übereinandergeschrieben, wenn das Oszilloskop mit dieser Impulsserie 2 getriggert wird. (Hinweis: Diese Triggerimpulse werden vom Impulssteuergerät erzeugt und entsprechen zeitlich der negativen Flanke des Rechteckausgangssignals des Triggerimpulsgenerators.)

Mit dem Schalter "Trigger-Sender" ändert man die Triggerimpulse für das Oszilloskop. Steht er auf "Sender" wird der Oszillograf mit derselben (geteilten) Frequenz getriggert wie der Ultraschallfrequenzgenerator, sonst mit der ursprünglichen Frequenz des Triggerfrequenzgenerators. Die Grobeinstellung der Niederfrequenz erfolgt im Zweikanal-Modus des Oszillografen. Sie wird so gewählt, daß die gewünschte Überlagerung jedes bzw. jedes 2. oder 3. Echos möglich wird. Hierbei muß der Schalter auf "Sender" stehen. Stellt man dann zur Echoüberlagerung auf "Trigger" um, sollte wieder Einkanal-Betrieb gewählt werden. Impulsserie 4 von Abb. 9 zeigt schematisch die Ultraschallechobursts, wie sie in Schalterstellung "Sender" zu sehen sein sollten. (Hinweis: Die Zuordnung Triggerimpuls (neg. Flanke) zum jeweiligen Echo muß unbedingt überprüft werden, um z.B. solche Fehlmessungen auszuschließen, die dadurch entstehen, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Echos ein weiterer Triggerimpuls liegt und die zugehörige Triggerperiode dann nicht der Echolaufzeit (oder einem Vielfachen) entspricht, sondern der halben Echolaufzeit. Am Überlagerungsbild der Echos kann man diesen Fehler i.A. nicht erkennen.)

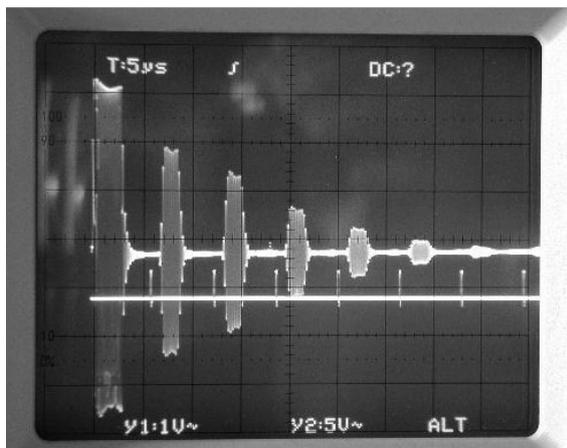


Abb. 10: Echofolge mit Nadelimpulsen, die der Impulsserie 2 aus Abb. 9 entsprechen

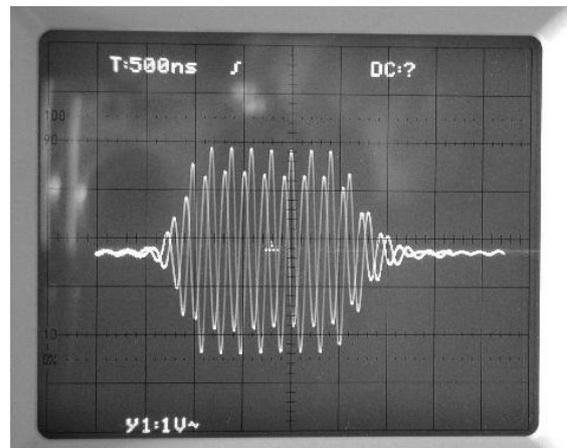


Abb. 11: Überlagerte, hellgetastete Echoimpulse vor dem Abgleich

Hinweis: Der z.Z. verwendete NF-Generator liefert keine Nadel- sondern Rechteckimpulse, deren Triggerflanke am Oszillografen eingestellt werden kann.

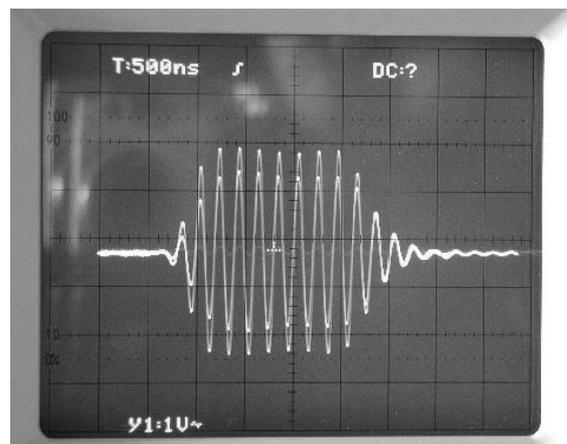


Abb. 12: Überlagerte Echos nach erfolgtem Abgleich

Zur Arbeitserleichterung beim Phasenabgleich können mittels Z-Steuerung des Oszillographen (zeitabhängige Helligkeitssteuerung, Blockschaltbild siehe Anhang, Abb. A1) zwei zu vergleichende Echos hellgetastet und damit ohne die eventuell störende Bildüberlagerung durch Sendeburst und die restlichen Echos direkt verglichen werden. Durch die Potentiometer Delay 1-4 werden die beiden Hellastfenster eingestellt und damit die gewünschten Echos ausgewählt (Impulsserie 5), was vor der Echo-Überlagerung geschieht. Dazu wird der Z-Pegel erhöht, bis die ausgewählten Bereiche zu erkennen sind. Nun stellt man die beiden Hellastzeitfenster ein, wobei man darauf achten muß, nur Echos auszuwählen, auf die auch getriggert wird. (Dies ist nur relevant, falls man nicht auf jedes Echo triggert, siehe unten.) Wichtig ist in jedem Falle die abschließende Prüfung, ob auch die nicht hellgetasteten Echos phasenrichtig liegen. Abb. 10, 11 und 12 zeigen die verschiedenen Phasen des Abgleichs.

## 2.4 Berechnung von Geschwindigkeit und Dämpfung

Nach McSkimin [11] gilt bei phasenrichtiger Überlagerung folgende Beziehung für die Triggerperiode  $T_p$  der Niederfrequenz  $f_p$

$$T_p = p\tau - \frac{p\gamma}{2\pi f} + \frac{n}{f}. \quad (1)$$

Dabei ist  $\tau$  die Laufzeit eines Schallimpulses in der Probe. Der Phasenwinkel  $\gamma$  charakterisiert die Phasenverschiebung infolge der Reflexion des Wellenzuges an der Koppelschicht und am Wandler. Die Zahl  $p$  gibt die Nummer des Echos an, auf das jeweils neu getriggert wird. Erfolgt diese Triggerung vor jedem Echo neu, so ist  $p = 1$ . Wird auf jedes zweite Echo getriggert, so ist  $p = 2$  usw.  $f$  ist die Ultraschallfrequenz des gesendeten Ultraschallfrequenzimpulses (hier ca. 5 MHz). Die ganze Zahl  $n$  gibt die Abweichung von der exakt deckungsgleichen Überlagerung der Impulse an. Es ergibt sich folgende Situation: Für festes  $p$  entsprechen verschiedene phasenrichtige Überlagerungen verschiedenen Werten von  $n$ . Der Fall  $n = 0$  entspricht der exakten Überlagerung und wird auch als kritische Einstellung der Triggerfrequenz  $f_p$  bezeichnet. Da bei diesem Versuch mit dünnen Kittschichten (gegenüber der Schallwellenlänge) gearbeitet wird, kann der zweite Summand in Gleichung (1) vernachlässigt werden [11]. Somit reduziert sich Gleichung (1) auf

$$T_p = p\tau + \frac{n}{f}. \quad (2)$$

Für das Auffinden der exakten Überlagerung ( $n = 0$ ) muß man sich auf die korrekte Phasenlage und die Amplitudenverhältnisse am Echoanfang konzentrieren, da wegen nicht vernachlässigbarer Dämpfung die Echosynchronität oft nicht über die gesamte Burstbreite gegeben sein kann. Der Echovergleich hinsichtlich maximaler Amplitude im Zentrum der Echos liefert meist die falsche Überlagerung ( $n \neq 0$ ). Sind bei Proben mit geringer Dämpfung (z.B. Cu) hinreichend viele Echos sichtbar, liefert das im Anhang 2 beschriebene Verfahren [12] mit großer Sicherheit die korrekte Überlagerung.

Schließlich ergibt sich die Schallgeschwindigkeit  $v$  in einer Probe mit der Dicke  $d$  zu

$$v = \frac{2d}{\tau} = \frac{2d}{T_p/p} = 2pd f_p. \quad (3)$$

Die Dämpfung  $\alpha$  der Schallwelle, bezogen auf den von ihr zurückgelegten Weg, wird durch die Messung der Impulsamplituden (bzw. Spitze-Spitze-Spannungen) aufeinanderfolgender Echos unter der Voraussetzung eines exponentiellen Dämpfungsverhaltens bestimmt.

### 3. Verallgemeinertes Hookesches Gesetz

In den folgenden Betrachtungen wird der Festkörper in Kontinuumsnäherung beschrieben (Kontinuumsmechanik), d.h. von der Einbeziehung der realen mikroskopischen Festkörperbestandteile (Atome, Moleküle) wird abgesehen. Die in mechanischer Beziehung stehenden Festkörper“teilchen“ stellen dabei beliebig kleine, im Dreidimensionalen kontinuierlich angeordnete Festkörperbestandteile (Volumenelemente) dar.

Der Wellenausbreitungsvorgang basiert im Wesentlichen auf der Auslenkung dieser den Festkörper bildenden Teilchen aufgrund einer äußeren zeit- und ortsabhängigen (makroskopischen) Krafteinwirkung. Da die Teilchen im engen Verbund kontinuierlich angeordnet sind, somit also mikroskopische Bindungskräfte untereinander bestehen (die aber nicht auf reale Kräfte zwischen den Atomen zurückgeführt werden), ist die Auslenkung eines Teilchens von der Bewegung der es umgebenden Partikel abhängig. Dementsprechend wird die elastische Wellenbewegung charakterisiert durch den Teilchenverschiebungsvektor  $u_i$ , der die Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage angibt, sowie durch den Spannungstensor  $T_{ij}$ , der die auf sie einwirkenden sogenannten Kontaktkräfte beschreibt.

Wird ein Teilchen durch äußere Krafteinwirkung aus seinem Ruhezustand am Ort  $x_i$  zum Zeitpunkt  $t$  an den Ort  $x_i'(x_i, t)$  ausgelenkt, dann ist seine Verschiebung gegeben durch

$$u_i = x_i' - x_i. \quad (4)$$

Die aus seiner Umgebung auf ein Teilchen wirkenden Kräfte müssen natürlich mit der Deformation des Festkörpers, also der Verzerrung seiner Teilchen über eine die elastischen Eigenschaften des Festkörpers beschreibende Größe verknüpft sein. Im Bereich der linearen Elastodynamik geschieht dies durch das verallgemeinerte Hookesche Gesetz

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}, \quad (5)$$

das Spannungen  $T_{ij}$  und Dehnungen  $S_{kl}$  mit dem ortsabhängigen elastischen Tensor  $c_{ijkl}$  verknüpft<sup>1</sup>. Dieser materialabhängige Tensor vierter Stufe wird oft auch als Steifigkeitstensor bezeichnet. Der Dehnungstensor ist folgendermaßen definiert:

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (6)$$

Diese Definition gilt unter der Voraussetzung kleiner Deformationen. Im Hinblick auf die kartesischen Komponenten des Verzerrungstensors, die sich aus den partiellen Ableitungen der kartesischen Teilchenverschiebungskomponenten zusammensetzen, bedeutet dies

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1. \quad (7)$$

Diese Beziehung kennzeichnet den Gültigkeitsbereich des Hookschen Gesetzes. Neben dem Steifigkeitstensor wird oft auch der zum ihm inverse Tensor der elastischen Nachgiebigkeiten  $s_{ijkl}$  verwendet.

---

<sup>1</sup> In Gleichung (5) und im weiteren gilt die Einsteinsche Summationkonvention: Über doppelt auftretende Indizes muß von 1 bis 3 summiert werden.

Im isotropen Stoff gibt es nur zwei unabhängige elastische Steifigkeitskoeffizienten  $c_{1111} \equiv c_{11} = c_{22} = c_{33}$  und  $c_{1122} \equiv c_{12} = c_{13} = c_{23}$ . Es gilt  $c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{36} = 0$ . Außerdem ist  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ . Hier und im Folgenden wird die Voigtsche Index-Notation [8] verwendet, die es gestattet, hinsichtlich eines Indexpaares symmetrische Tensoren durch folgende Ersetzung der Indexpaare als Tensoren verringerter Stufe zu beschreiben:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$  (d.h. beim Steifigkeitstensor  $c_{ijkl} \rightarrow c_{mn}$ ).

Bei isotropen Stoffen (und nur dort) sind weitere elastische Koeffizienten üblich, darunter die oft verwendeten Größen Schermodul  $G = (c_{11} - c_{12})/2$  (auch Torsionsmodul genannt), Elastizitätsmodul (auch als Youngscher Modul bzw. E-Modul bezeichnet) sowie die Querkontraktion (Poissonzahl)  $\mu$ . Da die Module  $G$  und  $E$  nicht über das Hooksche Gesetz (Ursache: Dehnung, Wirkung: Spannung), sondern wegen der vertauschten Ursache-Wirkung (experimentell sinnvoller) als reziproke Nachgiebigkeiten definiert sind, ist der Zusammenhang von  $E$  und  $\mu$  mit den elastischen Steifigkeiten (Gleichungen 8, 9) etwas komplexer (siehe z.B. [1], [7])<sup>2</sup>.

$$E = c_{11} - \frac{2c_{12}^2}{c_{11} + c_{12}}, \quad \mu = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}} \quad (8, 9)$$

#### 4. Elastische Koeffizienten und Bewegungsgleichung

Eine der beiden Grundgleichungen, die die Basis der mathematischen Theorie der elastischen Wellenausbreitung bilden, ist das verallgemeinerte Hookesche Gesetz, Gl. (5). Da stets homogene beziehungsweise stückweise homogene Medien betrachtet werden, ist der elastische Tensor  $c_{ijkl}$  ortsunabhängig. Generell ist er symmetrisch hinsichtlich der Vertauschung der Indizes 1 und 2 bzw. 3 und 4 sowie hinsichtlich der Vertauschung der Indexpaare 1,2 mit 3,4:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (10)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie des Dehnungstensors  $S_{kl}$  erhält man damit das Hookesche Gesetz in der Form

$$T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = T_{ji}. \quad (11)$$

Die 81 Elemente des  $c_{ijkl}$ -Tensors (elastische Konstanten bzw. Steifigkeiten) reduzieren sich wegen der allgemeinen Symmetrie, Gl. (10), auf 21 unabhängige Koeffizienten. Beim Vorliegen weiterer Symmetrien verringert sich diese Zahl noch mehr. In Voigt-Notation lautet der elastische Tensor in Matrixdarstellung zum Beispiel für kubische Symmetrie

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

<sup>2</sup> Achtung: Beide Formeln sind im Lehrbuch von Weißmantel/Hamann [6] nicht korrekt.

Zur mathematischen Behandlung der Wellenausbreitung wird von der Newtonschen Bewegungsgleichung ausgegangen. Diese lautet allgemein für ein Festkörper-Volumenelement

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_j = -f_j \quad (13)$$

und verknüpft die aufgrund äußerer zeit- und ortsabhängiger Volumenkräftdichten  $f(x, t)$  auftretenden Trägheitskräftdichten mit den an der Oberfläche des Volumenelements aufgrund der elastischen Materialeigenschaften auftretenden Zug- oder Druckkräftdichten, die aus der Divergenz des Spannungstensors resultieren.

Die Trägheitskräftdichten werden durch das Produkt der Dichte  $\rho$  mit der Beschleunigung des Volumenelements (der zweiten zeitlichen Ableitung der Teilchenverschiebung) ausgedrückt. Mit Gleichung (11) lautet die Bewegungsgleichung für die Teilchenverschiebung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} c_{ijkl} u_l - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_j = -f_j. \quad (14)$$

## 5. Ebene Wellen

Die zeitharmonische homogene ( $f_i = 0$ ) Bewegungsgleichung lautet

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_l. \quad (15)$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist die ebene monochromatische Welle mit dem Verschiebungsvektor

$$\underline{u} = A_0 \underline{a} e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}. \quad (16)$$

$A_0$  ist die Verschiebungsamplitude,  $\underline{r}$  der Ortsvektor,  $\underline{k} = |\underline{k}| \underline{n}$  der Wellenvektor,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\underline{a}$  der Einheitspolarisationsvektor der Welle. Der Wellenvektor sei gegeben,  $\omega$  und der Polarisationsvektor sind gesucht. Nach dem Einsetzen von (16) in (15) erhält man

$$\rho \omega^2 a_i = c_{ijlm} k_j k_m a_l. \quad (17)$$

Etwas umgeformt ergibt dieser Satz von drei Gleichungen ( $i = 1, 2, 3$ ) die sogenannte Christoffelgleichung

$$(\Lambda_{il} - v^2 \delta_{il}) a_l = 0, \quad (18)$$

die mathematisch das Eigenwertproblem des Christoffeltensors  $\Lambda_{il} = \frac{1}{\rho} c_{ijlm} n_j n_m$  mit den drei Eigenvektoren  $\underline{a}$  und den drei zugehörigen Eigenwerten  $v^2$  darstellt ( $n_i$  - Richtungskosinus des Wellenvektors,  $\delta_{il}$  - Kroneckersymbol).  $\underline{v} = \underline{n} \omega / k$  ist die Phasengeschwindigkeit der Schallwelle (Geschwindigkeit der Wellenfronten, d.h. der Flächen konstanter Phase).

Für eine vorgegebene Wellennormale  $\underline{\mathbf{n}}$  erhält man die Eigenwerte  $v^2$  bzw.  $|\underline{\mathbf{v}}| = \sqrt{v^2}$  als Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$|\Lambda_{ii} - v^2 \delta_{ii}| = 0. \quad (19)$$

Die entsprechenden Eigenvektoren  $\underline{\mathbf{a}}$  können durch Einsetzen der Eigenwerte in Gleichung (18) berechnet werden. Die drei Lösungen ( $\rightarrow$  Moden) werden als longitudinale (L), schnelle transversale (fast transverse - FT) und langsame transversale Mode (slow transverse - ST) bezeichnet. Die Eigenvektoren für eine bestimmte Wellenvektorrichtung  $\underline{\mathbf{k}}$  sind immer orthogonal zueinander. Für beliebige Richtungen und Kristallsymmetrien sind die Moden jedoch im Allgemeinen nicht rein longitudinal ( $\underline{\mathbf{k}} \parallel \underline{\mathbf{a}}$ ) bzw. transversal ( $\underline{\mathbf{k}} \perp \underline{\mathbf{a}}$ ) sondern aus beiden Varianten gemischt. Nur für  $\underline{\mathbf{k}}$  parallel hochsymmetrischer Kristallrichtungen können sich rein longitudinale bzw. rein transversale Moden ausbreiten. Meist ist die Vermischung nur geringfügig, und man bezeichnet diese Moden dann als quasilongitudinal bzw. quasitransversal, behält aber die Bezeichnungen L, FT und ST bei.

## 6. Gruppengeschwindigkeit und Energietransport

Als Gruppengeschwindigkeit ist folgende Größe definiert:

$$\underline{g} = \frac{d\omega(\underline{k})}{d\underline{k}} \quad (20)$$

Sie entspricht dem Gradienten von  $\omega(\underline{k})$  im  $k$ -Raum, der senkrecht auf den Flächen mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega$  steht. Eine Unterscheidung zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ist natürlich immer notwendig, wenn die Dispersionsrelation nicht linear ist. Jedoch auch bei linearer Dispersion unterscheiden sich für elastisch anisotrope Festkörper die beiden Geschwindigkeiten i. Allg. und stimmen nur manchmal bei hochsymmetrischen Kristallrichtungen überein.

Im Folgenden ist die Ableitung der Gruppengeschwindigkeit skizziert [13]. Aus Gleichung (17) folgt

$$\rho\omega^2 = c_{ijm} a_i a_j k_m. \quad (21)$$

Durch Differentiation nach  $k_n$  erhält man

$$2\rho\omega \frac{\partial\omega}{\partial k_n} = 2c_{ijn} a_i a_j k_j, \quad (22)$$

und für die Gruppengeschwindigkeit folgt

$$g_n = \frac{\partial\omega}{\partial k_n} = \frac{1}{\rho\omega} c_{ijn} a_i a_j k_j. \quad (23)$$

$\underline{g}$  ergibt sich also als Linearkombination aus den Komponenten des Wellenvektors mit den Wichtungsfaktoren  $c_{ijn} a_i a_j$ , die für ein gegebenes  $n$  natürlich i. Allg. nicht alle gleich sind. Ein intuitives Gefühl für Ausdruck (23) kann durch die Betrachtung des Energieflusses einer akustischen Welle gewonnen werden. Energiefluß (akustischer Poynting-Vektor) und die Gruppengeschwindigkeit haben die gleiche Richtung [13]. Der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ist in Abb. 13 illustriert. Abb. 14 zeigt eine der (überraschenden) Konsequenzen dieser Zusammenhänge anhand der schrägen Reflexion im anisotropen Medium.

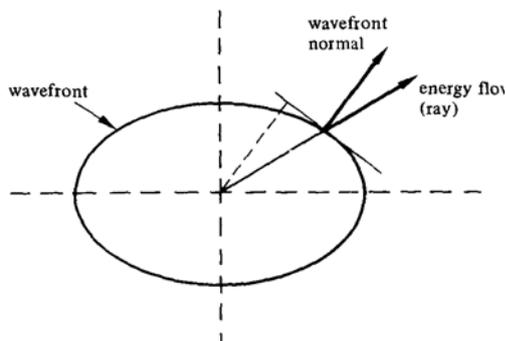


Abb. 13: Energiefluß und Phasengeschwindigkeit für eine nichtsphärische Wellenfront

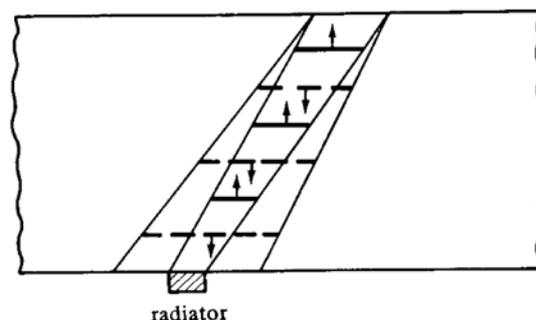


Abb. 14: Schräge Reflexion eines Energiestrahls im anisotropen Festkörper

## 7. Einige Bemerkungen zur Schalldämpfung

Da die Schallausbreitung mit Verlusten durch die innere Reibung der untersuchten Materialien verbunden ist, müssen diese Effekte strenggenommen bei der Berechnung der Schallausbreitung berücksichtigt werden. Der Tensor der elastischen Steifigkeiten muß dann als komplexe Größe betrachtet werden. Bei kleinen Dämpfungen kann man diese jedoch mit guter Näherung separat betrachten. (→ Inwieweit erfüllen die vorliegenden Proben diese Bedingung?)

Die Schalldämpfung ist in festen Körpern stark frequenzabhängig.

Wichtige Ursachen dieses dissipativen Effektes sind Punktdefekt- und Versetzungsrelaxationen sowie Korngrenzen- und Domänenrelaxationen in den entsprechenden Substanzgruppen.

In nichtkristallinen Materialien (Gläsern und Polymeren) gelten spezielle Gesetzmäßigkeiten.

Eine Übersicht über Dämpfungseffekte in Festkörpern wird beispielsweise in [14] gegeben.

### Danksagung

Besonders Prof. Dr. W. Arnold (Universität des Saarlandes in Saarbrücken, Fachbereich Werkstoffwissenschaften und Fertigungstechnik, Lehrstuhl für zerstörungsfreie Prüfung und Qualitätssicherung) ist zu danken, der umfangreiches Anleitungsmaterial der dortigen Ultraschallpraktikumsversuche zur Verfügung stellte. Daraus ist einiges in umgearbeiteter Form verwendet worden. Prof. Dr. em. H. Neddermeyer (Universität Halle, Institut für Physik) half bei der Beschaffung des Kupfer-Einkristalls, der von Prof. Dr. E. Kisker (Universität Düsseldorf, Institut für Angewandte Physik) stammt. Die Glasprobe von der Flachglas Torgau GmbH stellte Dr. W. Fränzel (Universität Halle, Institut für Physik) zur Verfügung und die Sinterkorundprobe sowie die keramische Bariumtitanatprobe Dr. H. T. Langhammer (Universität Halle, Institut für Chemie). Herr Gradhand (Universität Halle, stud. phys.) hat im Rahmen eines Praktikums bei der Ausarbeitung des Versuchs mitgewirkt.

### Spezielle Literatur

- [7] H. F. Pollard „Sound waves in solids“, Pion Limited, London 1977.  
Auszüge siehe Web-Seite des F-Praktikums im Institut für Physik der MLU:  
[http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit\\_SoundWaves.pdf](http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit_SoundWaves.pdf)
- [8] W. Voigt „Lehrbuch der Kristallphysik“, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1966 (Nachdruck). Buchsignaturen in Bibliothek Heide-Süd (Ha 4): PH B 9227, C G 947, MI AB 5244, letztere beide: Originalausgabe von 1910.  
- für Angehörige der Uni Halle im ULB-OPAC-Katalog herunterladbar  
Link: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-15884-4>
- [9] R. Truell, C. Elbaum, B. B. Chick, “Ultrasonic Methods in Solid State Physics”, Academic Press, New York 1969.  
Auszüge siehe Web-Seite des F-Praktikums im Institut für Physik der MLU:  
[http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit\\_UltrasonicMethods.pdf](http://positron.physik.uni-halle.de/F-Praktikum/PDF/28lit_UltrasonicMethods.pdf)
- [10] E. P. Papadakis, J. Acoust. Soc. Am., **42**, 1045 (1967).
- [11] H. J. McSkimin, J. Acoust. Soc. Am., **33**, 12 (1961).
- [12] R. Quilitzsch, Dissertation, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 1977.
- [13] J. P. Wolfe “Imaging Phonons - Acoustic Wave Propagation in Solids”, Cambridge Unipress 1998.
- [14] R. Schaller, G. Fantozzi, G. Gremaud (Herausgeber) “Mechanical Spectroscopy  $Q^{-1}$ ”, TransTech Publications, Uetikon-Zuerich 2001.
- [15] W. Rehwald, Adv. Phys., **22** [6] 721 (1973).

# Anhang 1

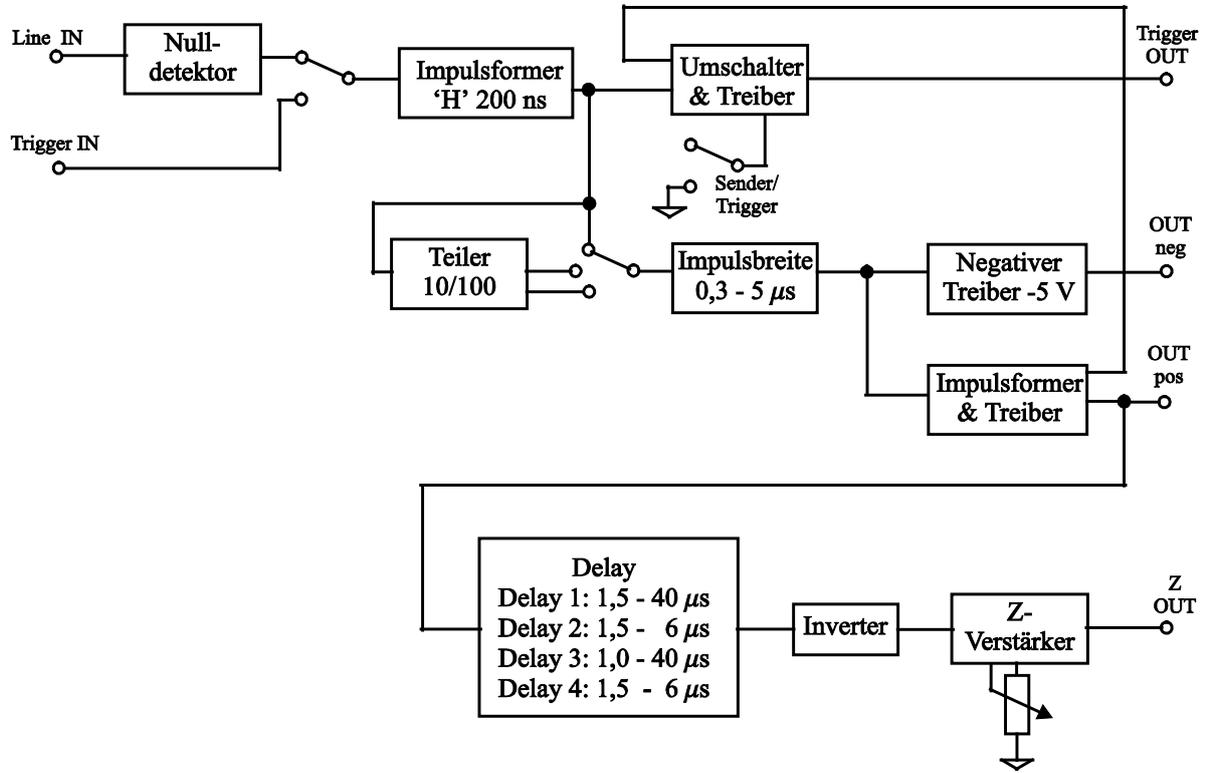


Abb. A1: Blockschaltbild des Impulssteuergerätes mit Frequenzteiler 1/10/100:1, Burstbreitensteller und Verzögerungsgenerator für die Z-Steuerung

## Anhang 2

### Verfahren zur sicheren Bestimmung der korrekten Überlagerung der Echobursts (n=0) nach [12]

Das Verfahren beruht auf dem Vergleich von gemessenen  $p \cdot f_p$ -Werten (= Schallgeschwindigkeit bis auf den Faktor 2d) für verschiedene Parameter  $p$  und  $n$ . Die nach  $p \cdot f_p$  umgestellte Gl. 2 lautet:

$$p \cdot f_p = \frac{1}{\tau + \frac{n}{p} T_{US}} \quad (\text{A1})$$

$T_{US}$  ist die Periodendauer der Ultraschall-Hochfrequenz.

Mißt man nun für verschiedene Triggervarianten (z.B.  $p=1$  und  $p=3$ ) jeweils möglichst viele synchrone Überlagerungsvarianten (Variation von  $n$ ) unter denen sich natürlich auch die richtige ( $n=0$ ) befindet, gibt es beim Vergleich beider Serien mehrere Übereinstimmungen der  $p \cdot f_p$ -Werte. Wie man Gl. A1 entnimmt, treten diese Übereinstimmungen bei  $n/p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  auf. D.h. die richtige Überlagerung kann sich nur unter diesen übereinstimmenden Werten befinden, wodurch bei der Serie  $p = 2$  nur jeder zweite ( $n=0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ), bei  $p = 3$  nur jeder dritte ( $n=0, \pm 3, \pm 6, \dots$ ) usw.  $p \cdot f_p$ -Wert in Frage kommen. Somit sind mit höher werdendem  $p$  die in Frage kommenden Überlagerungen immer weiter von der richtigen Überlagerung ( $n=0$ ) entfernt.

Damit können die falschen Überlagerungen wegen ihrer dann sehr deutlichen Verschiebung der Echos gegeneinander leicht als falsche Überlagerungen identifiziert werden.

Die Identifizierungssicherheit der richtigen Überlagerung steigt also mit steigendem  $p$ . Dem ist aber wegen der endlichen Burstbreite (Zahl der Ultraschall-Schwingungen pro Burst) eine obere Grenze gesetzt.