

Ableitung der Compton-Streuformel

Als Ansatz wähle man unter Beachtung der relativistischen Beziehungen für Energie und Impuls den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz in x- und y-Richtung (da die Bewegung aufgrund der Drehimpulserhaltung in einer Ebene stattfindet):

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + E_e \quad \frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \vartheta + p_e \cos \varphi \quad 0 = \frac{E_{\gamma'}}{c} \sin \vartheta - p_e \sin \varphi$$

(Gleichung 1) (Gleichung 2) (Gleichung 3)

Dabei sind E_γ und $E_{\gamma'}$ die Energie des Gammaquants vor und nach dem Stoß, E_e ist die kinetische Energie des Elektrons und p_e sein Impuls.

Bekanntlich gilt für den relativistischen Impuls:

$$p^2 = m_e^2 v^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = m_e^2 v^2 \left(\frac{c^4}{v^2 c^2 - v^4} - \frac{c^2}{v^2} \right) = m_e^2 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Mit

$$p^2 = m_e^2 c^2 (\gamma^2 - 1) = m_e^2 c^2 ((\gamma - 1)^2 + 2(\gamma - 1))$$

folgt:

$$p^2 c^2 = m_e^2 c^4 (\gamma - 1)^2 + 2m_e^2 c^4 (\gamma - 1).$$

Des weiteren gilt (vgl. Stöcker S. 139):

$$E_e = m_e c^2 (\gamma - 1),$$

und damit:

$$p^2 c^2 = E_e^2 + E_e 2m_e c^2.$$

Es ergibt sich

$$pc = \sqrt{E_e(E_e + 2m_e c^2)} \quad (\text{Gleichung 4}).$$

Nun zu Gleichung 2:

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \vartheta + p_e \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$\rightarrow \text{Gleichung 3) } \rightarrow \frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \vartheta + p_e \sqrt{1 - \frac{E_{\gamma'}^2}{p_e^2 c^2} \sin^2 \vartheta}$$

$$\rightarrow \frac{E_\gamma^2}{c^2} - \frac{E_{\gamma'}^2}{c^2} \cos^2 \vartheta - 2p_e \sqrt{1 - \frac{E_{\gamma'}^2}{p_e^2 c^2}} \sin^2 \vartheta \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \vartheta - p_e^2 \left(1 - \frac{E_{\gamma'}^2}{p_e^2 c^2} \sin^2 \vartheta \right) = 0$$

$$p_e \sqrt{1 - \frac{E_{\gamma'}^2}{p_e^2 c^2}} \frac{E_{\gamma'}}{c} \cos \vartheta = \frac{E_\gamma E_{\gamma'}}{c^2} \cos \vartheta - \frac{E_{\gamma'}^2}{c^2} \cos^2 \vartheta$$

$$\rightarrow \frac{E_\gamma^2}{c^2} - \frac{E_{\gamma'}^2}{c^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{E_\gamma E_{\gamma'}}{c^2} \cos \vartheta - p_e^2 + \frac{E_{\gamma'}^2}{c^2} \sin^2 \vartheta = 0$$

$$\rightarrow E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos \vartheta - p_e^2 c^2 = 0$$

$$\rightarrow 4) \rightarrow E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - T^2 - 2Tm_e c^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos \vartheta = 0$$

$$\rightarrow 1) \rightarrow E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - (E_\gamma - E_{\gamma'})(E_\gamma - E_{\gamma'} + 2m_e c^2) - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos \vartheta = 0$$

$$\rightarrow E_\gamma E_{\gamma'} - m_e c^2 (E_\gamma - E_{\gamma'}) = E_\gamma E_{\gamma'} \cos \vartheta$$

$$E_\gamma = h\nu; \quad E_{\gamma'} = h\nu'; \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$1 - \cos \vartheta = \frac{m_e c^2}{h} \frac{(\nu - \nu')}{\nu \nu'}$$

$$\rightarrow \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \lambda' \lambda = \lambda' - \lambda$$

$$\frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \text{ mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

Für $\varepsilon \ll 1 \rightarrow \frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = 1, \Delta E = 0$. Die Streuung ist also elastisch für alle Winkel (Thomson-Streuung).

$$\text{Für } \varepsilon = 1 \rightarrow \frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{1}{2 - \cos \vartheta} \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right]$$

Einfacher kann man die Comptonformel auch aus der Relativitätstheorie herleiten. Dabei nimmt man an, dass alle Vierervektoren der Bewegung hochrelativistischer Teilchen lichtartig sind.

Betrachten wir die Viererimpulse:

Für das Photon

Für das Elektron

$$\hbar \begin{pmatrix} k \\ \vec{k} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Stoß} \rightarrow \hbar \begin{pmatrix} k' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Stoß} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Somit:

$$\hbar \begin{pmatrix} k \\ \vec{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} k' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Wellenzahl der lichtartigen Vierervektoren:

$$k^\mu k_\mu = k'^\mu k'_\mu = 0 \quad \text{da ja} \quad v^\mu q_\mu = v^0 q_0 - \vec{v} \vec{q}$$

$$\rightarrow m_e^2 c^2 - 2\hbar^2 (k'k - \vec{k}'\vec{k}) + 2\hbar(k'\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - \vec{k}'\vec{p}) - 2\hbar(k\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - \vec{k}\vec{p}) = m_e^2 c^2$$

$$\rightarrow 2\hbar(k - k')m_e c - 2\hbar^2 (k'k - \vec{k}'\vec{k}) = 0$$

$$\rightarrow (k - k') = \frac{\hbar}{m_e c} k'k(1 - \cos \vartheta)$$

$$\rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar}{m_e c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$\text{mit } \lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\rightarrow \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \lambda_c (1 - \cos \vartheta)$$

$$\frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

Man erhält also:

$$E_{\gamma'} = E_\gamma \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

$$E_e = E_\gamma \left(1 - \frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} \right) = \frac{\varepsilon(1 - \cos \vartheta)}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

Die höchste Energie der Elektronen nach Comptonstreuung errechnet sich (Lage der Compton-Kante) im Falle der direkten Rückstreuung um 180° gemäß:

$$\left(\frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} \right)_{\min} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}.$$

Die Comptonkante liegt also bei

$$E_\gamma - E_{\gamma' \min} = E_\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon} \right) = E_\gamma \left(\frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \right) \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}.$$

Bestimmung der Stoßquerschnitte und Absorptionskoeffizienten von Streumaterialien

Der Absorptionskoeffizient ergibt sich zu

$$\mu = \frac{1}{x} * \ln \frac{N(x)}{N_0}$$

N_0 und $N(x)$ werden bei Messungen am besten jeweils um die sogenannte "dead time" erhöht, um bei höheren Aktivitäten die Totzeit des Germaniumdetektors mit zu berücksichtigen.

Um den totalen Wirkungsquerschnitt berechnen zu können, benötigt man den Zusammenhang

$$\sigma = \frac{\mu}{n} = \frac{\mu * M}{Z * \rho * N_A}$$

(n = Elektronendichte)

Die entsprechenden Ergebnisse für den totalen Wirkungsquerschnitt sind:

Blei: 0,423 barn

Kupfer: 0,253 barn

Aluminium: 0,189 barn

Der totale Wirkungsquerschnitt für den Comptoneffekt kann jedoch theoretisch abgeschätzt werden (vgl. Marmier, Kapitel 3.5.3):

Der differenzielle Wirkungsquerschnitt = Stoßquerschnitt für die inelastische Streuung kann mit Hilfe der Klein-Nishina-Formel berechnet werden:

$$\frac{d\sigma_{comp}}{d\Omega} = \frac{1}{2} * r_o^2 * \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 * \left[\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - 2 + 4 \cos^2 \vartheta \right]$$

$$\frac{d\sigma_{comp}}{d\Omega} = \frac{1}{2} * r_o^2 * \left(\frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \right)^2 * \left[\frac{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)}{1} + \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} - 2 + 4 \cos^2 \vartheta \right]$$

Das Ergebnis nach Integration über den gesamten Raumwinkel liefert mit

$$\varepsilon = hf / (m(\text{el.}) * c^2) = 0,662 * 10^6 * 1,6022 * 10^{-19} \text{ J} / (9,1094 * 10^{-31} * 9 * 10^{16}) = 1,2937$$

(r_o = klassischer Elektronenradius = $1,41 * 10^{-15}$ m)

$$\sigma_{tot(C)} = 0,0745078 \text{ barn} .$$

Nach Marmier, Kap. 3.5.3 gibt es eine Formel, die etwas geringere Werte liefert:

$$\sigma_{tot(C)} = 2 * \pi * r_o^2 * \left(\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} * \left[\frac{2(1 + \varepsilon)}{1 + 2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + 2\varepsilon) \right] + \frac{1}{2\varepsilon} \ln(1 + 2\varepsilon) - \frac{1 + 3\varepsilon}{(1 + 2\varepsilon)^2} \right)$$

Daraus ergibt sich:

$$\sigma_{tot(C)} = 0,064168553 \text{ barn} .$$

In jedem Fall aber ist der totale Wirkungsquerschnitt für den Comptoneffekt unabhängig vom streuenden Element. Der totale Stoßquerschnitt = Wirkungsquerschnitt für den Comptoneffekt ist lediglich von der Wellenlänge der einfallenden elektromagnetischen Strahlung abhängig (für „höhere“ Photonenenergie im MeV- Bereich)

In jedem Fall kann man aus der Differenz des gemessenen totalen Wirkungsquerschnitts und des theoretischen totalen Wirkungsquerschnitts für den Comptoneffekt den totalen Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt (Vernachlässigung von Rayleigh-Streuung) berechnen, falls auch Paarbildungsprozesse vernachlässigt werden können.

Doch auch der Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt kann theoretisch abgeschätzt werden:

$$\sigma_{tot(Ph)} = 4\pi * r_o^2 * \alpha^4 * \frac{1}{\epsilon} Z^5 .$$

(α ist die Feinstrukturkonstante: $\alpha \approx 1/137$).

Dies liefert

$$\sigma_{tot(Ph)} = 5,48 * 10^{-38} m^2 Z^5 .$$

Allerdings darf man den klassischen Elektronenradius nicht aus der folgenden Beziehung definieren:

$$E_{pot} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = m_o c^2 ,$$

was zu $r_{el.} = 1,41 * 10^{-15} m$ führt, sondern man nimmt eine kontinuierliche Ladungsverteilung über das Volumen an, anstatt von einer reinen Oberflächenladung auszugehen. Dann ergibt sich für den klassischen Elektronenradius gerade der doppelte Wert von

$$r_{el.} = 2,814 * 10^{-15} m .$$

Die nun resultierenden Werte stimmen mit den Messwerten im allgemeinen weit besser überein.

Vergleich der Werte mit korrigiertem Elektronenradius

Aufintegration der Klein-Nishina-Formel:

$$\sigma_{tot(C)} = 0,29676barn .$$

Formel aus Marmier (Kapitel 3.5.3)

$$\sigma_{tot(C)} = 0,25558barn .$$

Die Werte sind viermal höher, da der klassische Elektronenradius quadratisch in die Rechnung eingeht. In jedem Fall kann man aus der Differenz des gemessenen totalen Wirkungsquerschnitts und des theoretischen totalen Wirkungsquerschnitts für den Comptoneffekt den totalen Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt berechnen (bei Vernachlässigung von Rayleigh- Streuung und Paarbildung).

Wahrscheinlichkeit für Mehrfachstreuung

Man sieht bei der Betrachtung der berechneten Absorptionskoeffizienten aus Messwerten häufig, dass die Absorptionskoeffizienten sehr stark mit der Dicke des Streuers schwanken.

Dabei nehmen die Absorptionskoeffizienten mit steigender Dicke des Streuers im allgemeinen zu. Möglicherweise werden also elastisch gestreute Photonen durch einen Doppelstreuprozess doch noch vom Zähler weggestreut, wenn die Dicke hinreichend groß ist.

Zuerst muss, um dies zu prüfen, aus den Ergebnissen für die verschiedenen Absorptionskoeffizienten ein Absorptionskoeffizient für die Streuerdicke 0 mm extrapoliert werden.

Dann kann mit diesem Absorptionskoeffizienten die erwartete Aktivität für die verschiedenen Dicken berechnet werden:

$$N_{th}(x) = N_0 * e^{-\mu_o x}$$

Die Wahrscheinlichkeit (=WSK) für einen Doppelstreuprozess folgt auf jeden Fall aus der Abweichung zwischen Messwert und theoretischem Wert über der Anfangsphotonenanzahl:

$$WSK = \left| \frac{N_{gemessen} - N_{theoretisch}}{N_o} \right|$$

Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Der differentielle Stoßquerschnitt für den Comptoneffekt kann aus der Abnahme der Intensität des Primärstrahls bestimmt werden.

Dabei gilt:

$$\sigma = -\frac{1}{n * x} * \ln\left(\frac{N(x)}{N_o}\right) = -\frac{M}{Z * \rho * Na * x} * \ln\left(\frac{N(x)}{N_o}\right) = -1,0724 * 10^{-28} m^2 * \ln\left(\frac{N(x)}{N_o}\right)$$

($c := 1,0724 * 10^{-28} m^2$)

$$\frac{d\sigma}{dN_o} = c * \frac{N_o * N(x)}{N(x) * N_o^2} = \frac{c}{N_o}$$

$$d\sigma = c * \frac{dN_o}{N_o} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{c}{d\Omega} * \frac{dN_o}{N_o}$$

Dabei ist $d\Omega$ aus der Streugeometrie zu berechnen. dN_o ist die Abnahme der Intensität des Primärstrahles, also gerade die ermittelte Zahl der Comptongestreuerten Elektronen.

Doppelstreuung

- Je größer der Winkel, unter dem gemessen wird, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für Doppelstreuung, da der Weg der Photonen im Streumedium zunimmt.
- Dabei ist zu erwarten, dass durch Doppelstreuung gestreute Photonen wieder aus der Streurichtung herausgestreut werden und der Wert für große Streuwinkel durch Doppelstreuung verringert wird.

- Bei kleinen Streuwinkeln dagegen könnten Photonen, die unter großen Winkeln gestreut wurden, durch Doppelstreuung wieder unter kleine Winkel zurückgestreut werden und die Ergebnisse verfälschen. Dann kann es zu Messwerten kommen, die deutlich über dem Erwartungswert liegen.
- Bei sehr kleinen Winkeln sind die Ergebnisse unbrauchbar, da die meisten Photonen transmittierte Photonen sind, die gar nicht gestreut wurden.

Näherungsweise gültige Beziehung für den Compton- Streuquerschnitt

Im Falle $\varepsilon \gg 1$ kann man näherungsweise von der Beziehung

$$\sigma_{\text{Comptoneffekt}} \propto \frac{Z}{E_\gamma}$$

ausgehen.

Leider haben wir keine näheren Angaben zu dem Problem gefunden, dass laut Marmier, Kap. 3.5.3 gilt:

$$\sigma_{\text{tot}(C)} = 2 * \pi * r_o^2 * \left(\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} * \left[\frac{2(1 + \varepsilon)}{1 + 2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + 2\varepsilon) \right] + \frac{1}{2\varepsilon} \ln(1 + 2\varepsilon) - \frac{1 + 3\varepsilon}{(1 + 2\varepsilon)^2} \right)$$

was einen Wert

$$\sigma_{\text{tot}(C)} = 0,25558 \text{ barn}$$

liefert und dem jedoch die Behauptung aus der Vorbereitungsmappe

$$\sigma_{\text{Comptoneffekt}} \propto \frac{Z}{E_\gamma}$$

gegenübersteht. Zudem weicht die obige Formel für den totalen Stoßquerschnitt leicht von dem ab, was sich nach Aufintegration des differentiellen Wirkungsquerschnittes ergibt (vergl. Diskussion oben). Ohne den wahren Grund genau zu kennen nehmen wir deshalb an, dass die von Z unabhängige Formel, der für alle Materialien konstante Wirkungsquerschnitt für den Comptoneffekt für $\varepsilon \sim 1$ gilt, während für höhere Photonenenergien gilt:

$$\sigma_{\text{Comptoneffekt}} \propto \frac{Z}{E_\gamma}$$