

ihre Lokalisierungstendenz. Dieser Tatsache kann durch eine hohe effektive Masse  $m^* \gg m$  Rechnung getragen werden. Typischerweise ist  $m^*/m \sim 100\text{--}1000$ . Man nennt diese Substanzen deshalb *Schwere Fermionen*.<sup>10,11,12</sup>

In dem Schwere-Fermionen-System  $\text{CeCu}_2\text{Si}_2$  wurde im Jahre 1979 von **Frank Steglich**<sup>13</sup> Supraleitung entdeckt. Supraleiter zeichnen sich dadurch aus, dass sie den elektrischen Strom ohne Energieverlust tragen können. Diese Eigenschaft entsteht durch die koordinierte Bewegung zweier Elektronen, welche ein so genanntes Cooper-Paar bilden. In klassischen Supraleitern entsteht diese Koordination durch die elastische Kopplung der Elektronen an die Bewegung der Atome im Kristallgitter. Bei Schwere-Fermionen-Supraleitern vermutet man hingegen, dass die Bewegung der „schweren Elektronen“ durch ihre Kopplung an die Bewegung der magnetischen Momente koordiniert wird. Dieser Mechanismus scheint nicht nur der Supraleitung in Metallen mit schweren Fermionen zugrunde zu liegen. Man vermutet vielmehr, dass in ihm auch der Schlüssel zum Verständnis der Hochtemperatur-Supraleiter zu finden ist. Deshalb werden heute Schwere-Fermionen-Systeme intensiv erforscht.

## 7.3 Transporteigenschaften

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit den Transporteigenschaften des freien Elektronengases beschäftigen. Dabei werden wir die Konzepte verwenden, die wir bereits in Abschnitt 6.4 bei der Behandlung des Wärmetransports durch die Phononen eingeführt haben. Eine genauere Diskussion der Transporteigenschaften von Festkörpern folgt in Kapitel 9, nachdem wir das Modell freier Elektronen durch Berücksichtigung der periodischen Struktur von kristallinen Festkörpern verfeinert haben und die daraus resultierende Bandstruktur eingeführt haben.

### 7.3.1 Elektrische Leitfähigkeit

#### 7.3.1.1 Definition der elektrischen Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  eines Festkörpers ist definiert als Proportionalitätskonstante zwischen treibendem elektrischem Feld  $\mathbf{E}$  und resultierender elektrischer Stromdichte  $\mathbf{J}_q$ :

$$\mathbf{J}_q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi_{el}. \quad (7.3.1)$$

<sup>10</sup> Z. Fisk, H. R. Ott, T. M. Rice, J. L. Smith, *Heavy-electron metals*, Nature **20** 124–129 (1986).

<sup>11</sup> M. B. Maple, *Novel Types of Superconductivity in f-Electron Systems*, Phys. Today **39**(3), 72 (1986).

<sup>12</sup> F. Steglich, *Schwere-Fermionen-Supraleitung*, Physik Journal, Nr. 8/9 (2004).

<sup>13</sup> **Frank Steglich**, geboren am 14. März 1941 in Dresden. Steglich studierte von 1960 bis 1966 Physik in Münster und Göttingen. 1969 promovierte er in Göttingen mit einer Arbeit zur thermischen Leitfähigkeit in stark fehlgeordneten dünnen metallischen Filmen. 1976 habilitierte er sich an der Universität zu Köln im Fach Physik. Von 1978 bis 1998 war er Professor für Experimentalphysik am Institut für Festkörperphysik der Technischen Hochschule/Technischen Universität Darmstadt. 1996 war er Gründungsdirektor des Max-Planck-Instituts für chemische Physik fester Stoffe in Dresden und übernahm dort die Abteilung Festkörperphysik. Steglich gilt als der Entdecker der Schwere-Fermionen-Supraleitung (1979).

Hierbei haben wir verwendet, dass wir die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  als Gradienten eines elektrischen Potentials  $\phi_{\text{el}}$  schreiben können. Wir erkennen dann sofort die Analogie zum Ausdrück (6.4.1) für die Wärmestromdichte  $\mathbf{J}_h$ . Die Einheit der elektrischen Leitfähigkeit ist  $1/\Omega\text{m}$  oder  $\text{A/Vm}$ .

### 7.3.1.2 Drude-Modell

Aus historischen Gründen diskutieren wir zunächst das bereits im Jahr 1900 von **Paul Drude** eingeführte Modell.<sup>14</sup> Obwohl dieses Modell von falschen Annahmen ausging, konnte es den linearen Zusammenhang zwischen elektrischer Stromdichte und elektrischem Feld (Ohmsches Gesetz) und auch den Zusammenhang zwischen elektrischer und thermischer Leitfähigkeit (Wiedemann-Franz-Gesetz) richtig erklären.

Drude ging von der Annahme aus, dass die Elektronen in einem Metall mit einem klassischen Teilchengas beschrieben werden können. Die Elektronen bewegen sich mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit  $v_{\text{th}}$  und stoßen ständig mit den Atomrümpfen. Die Elektronen werden durch die Wirkung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  beschleunigt und durch Stöße mit den Atomrümpfen abgebremst. Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m \frac{\mathbf{v}_D}{\tau}. \quad (7.3.2)$$

Der Term  $m \frac{\mathbf{v}_D}{\tau}$  hat die Form einer Reibungskraft und berücksichtigt die Stöße. Die Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_D = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{th}}$  gibt die vom elektrischen Feld zusätzlich bewirkte Geschwindigkeitskomponente wider. Diese relaxiert durch Stöße innerhalb der charakteristischen Stoßzeit  $\tau$ . Im stationären Fall ist  $d\mathbf{v}/dt = 0$  und wir erhalten

$$\mathbf{v}_D = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{E}. \quad (7.3.3)$$

Hierbei haben wir die *Beweglichkeit*  $\mu = e\tau/m$  eingeführt. Die Beweglichkeit gibt an, welche *Driftgeschwindigkeit*  $\mathbf{v}_D$  der Ladungsträger pro elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  erzeugt wird. Mit der Elektronendichte  $n$  erhalten wir die elektrische Stromdichte zu

$$\mathbf{J}_q = -en\mathbf{v}_D = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = ne\mu \mathbf{E} \quad (7.3.4)$$

und damit die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{\mathbf{J}_q}{\mathbf{E}} = \frac{ne^2\tau}{m} = ne\mu. \quad (7.3.5)$$

Aus den bei Raumtemperatur gemessenen Leitfähigkeiten von Metallen erhält man Streuzeiten in der Größenordnung von  $10^{-14}$  s, was zusammen mit der thermischen Geschwindigkeit von etwa  $10^5$  m/s zu mittleren freien Weglängen im Å-Bereich führt. Drude ging deshalb davon aus, dass die Elektronen an den Atomrümpfen gestreut werden, da ja deren Abstand gerade im Å-Bereich liegt. Eine offensichtlich falsche Annahme des Drude-Modells ist, dass alle Elektronen beschleunigt und gestreut werden, da dies ja nicht mit der Fermi-Dirac-Verteilung der Leitungselektronen vereinbar ist.

<sup>14</sup> Paul Drude, *Zur Elektronentheorie der Metalle, I. Teil, II. Teil, und Berichtigung*, Annalen der Physik 1, 556–613 (1900); ibid 3, 369–402 (1900); ibid 7, 687–692 (1902).

### 7.3.1.3 Sommerfeld-Modell

Die falschen Annahmen von Drude wurden von **Arnold Sommerfeld** korrigiert. Zur Beschreibung des elektrischen Transports in Metallen ging er von einem Gas freier Fermionen aus, die der Schrödinger-Gleichung gehorchen und dem Pauli-Prinzip unterliegen. Mit diesen Grundannahmen können wir mit Hilfe von einfachen Überlegungen einen Ausdruck für die elektrische Leitfähigkeit ableiten, der das Verhalten von einfachen Metallen gut beschreibt. Eine ausführlichere Diskussion der Transporteigenschaften erfolgt in den Abschnitten 9.4 und 9.5.

Um die elektrische Leitfähigkeit eines Festkörpers zu berechnen, müssen wir die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J}_q$  als Funktion der mittleren Geschwindigkeit  $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \hbar \mathbf{k} / m \rangle$  angeben. Die Stromdichte ergibt sich aus  $\langle \mathbf{v} \rangle$  durch Multiplikation mit der Elektronendichte  $n$  und der Ladung  $e$ :<sup>15</sup>

$$\mathbf{J}_q = -e n \langle \mathbf{v} \rangle = -e n \frac{\hbar}{m} \langle \mathbf{k} \rangle = -e \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar \mathbf{k}}{m}. \quad (7.3.6)$$

Im thermischen Gleichgewicht ist  $\langle \mathbf{k} \rangle = 0$  und es fließt kein elektrischer Strom. Eine endliche elektrische Stromdichte erhalten wir nur in einer Nichtgleichgewichtssituation. In Analogie zu (6.4.3) können wir schreiben:

$$\mathbf{J}_q = -\frac{en\hbar}{m} [\langle \mathbf{k} \rangle - \langle \mathbf{k} \rangle^0] = -\frac{en\hbar}{m} \delta \mathbf{k}. \quad (7.3.7)$$

Wir sehen, dass wir nur dann eine endliche Stromdichte erhalten, wenn die Impulsverteilung der Elektronen von der Gleichgewichtsverteilung abweicht.

Wir müssen jetzt klären, wie sich die Impulsverteilung der Elektronen in einem bestimmten Raumgebiet ändern kann. Hierzu tragen erstens von außen wirkende Kräfte und zweitens Streuprozesse der Elektronen bei. Wir können also schreiben:

$$\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} + \left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streu}}. \quad (7.3.8)$$

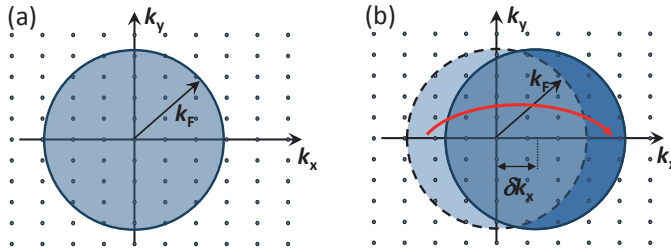
Wir werden im Folgenden nur stationäre Prozesse behandeln, d. h. Prozesse bei denen  $\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = 0$ . Wir werden ferner für die zeitliche Änderung des mittleren Elektronenimpulses durch Streuprozesse wie beim Drude-Modell einem einfachen *Relaxationsansatz*

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Streu}} = -\frac{\langle \mathbf{k} \rangle - \langle \mathbf{k} \rangle^0}{\tau} = -\frac{\delta \mathbf{k}}{\tau} \quad (7.3.9)$$

machen. Das heißt, wir beschreiben die Änderung des mittleren Elektronenimpulses durch eine mittlere Streuzeit  $\tau$ . Die Änderung von  $\langle \mathbf{k} \rangle$  durch eine äußere Kraft  $\mathbf{F}$  erhalten wir aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E} = m \frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \hbar \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \quad (7.3.10)$$

<sup>15</sup> Wir werden im Folgenden positive Elementarladungen mit  $e$  und negative mit  $-e$  bezeichnen. Die Richtung der Stromdichte  $\mathbf{J}_q = nev$  stimmt dann mit der technischen Stromrichtung überein.



**Abb. 7.10:** Die Fermi-Kugel umschließt alle besetzten Elektronenzustände im  $\mathbf{k}$ -Raum. (a) Für  $\mathbf{F} = 0$  ist der Gesamtimpuls null, da es zu jedem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  einen entsprechenden Wellenvektor  $-\mathbf{k}$  gibt. (b) Für  $\mathbf{F} \neq 0$  wächst jeder Wellenvektor im Zeitintervall  $t$  um  $\delta\mathbf{k} = \frac{e\mathbf{F}t}{\hbar}$  an. Dies entspricht einer Verschiebung der Fermi-Kugel um  $\delta\mathbf{k}$ . Die Zustände im hellblauen Bereich auf der linken Seite werden in den dunkelblauen Bereich auf der rechten Seite umverlagert.

zu

$$\left. \frac{\partial \langle \mathbf{k} \rangle}{\partial t} \right|_{\text{Kraft}} = -\frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \quad (7.3.11)$$

Durch Integration erhalten wir daraus

$$\langle \mathbf{k} \rangle(t) - \langle \mathbf{k} \rangle^0 = \delta\mathbf{k} = -\frac{e\mathbf{E}t}{\hbar}. \quad (7.3.12)$$

Das bedeutet, dass durch die Kraft  $\mathbf{F}$  der mittlere Impuls aller Elektronen innerhalb der Zeit  $t$  um  $\hbar\delta\mathbf{k}$  geändert wird. Dies entspricht der Verschiebung der gesamten Fermi-Kugel um  $\delta\mathbf{k}$  innerhalb der Zeit  $t$  (siehe hierzu Abb. 7.10). Schalten wir die äußere Kraft ab, so relaxiert  $\delta\mathbf{k} \propto e^{-t/\tau}$  aufgrund von Streuprozessen wieder gegen null.

Mit der Bedingung  $\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = 0$  folgt aus (7.3.8)

$$\delta\mathbf{k} = -\frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \tau \quad (7.3.13)$$

und wir erhalten damit aus (7.3.7) das *Ohmsche Gesetz*

$$\mathbf{J}_q = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = ne\mu \mathbf{E} = -ne\mathbf{v}_D \quad (7.3.14)$$

mit der Beweglichkeit

$$\mu = -\frac{\mathbf{v}_D}{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{J}_q}{ne\mathbf{E}} = \frac{e\tau}{m}. \quad (7.3.15)$$

Wie beim Drude-Modell gibt die Beweglichkeit an, welche mittlere *Driftgeschwindigkeit*  $\mathbf{v}_D = \hbar\delta\mathbf{k}/m$  der Ladungsträger pro elektrische Feldstärke erzeugt wird. Für die elektrische Leitfähigkeit ergibt sich mit der Definition (7.3.1)

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2\ell}{mv_F}. \quad (7.3.16)$$

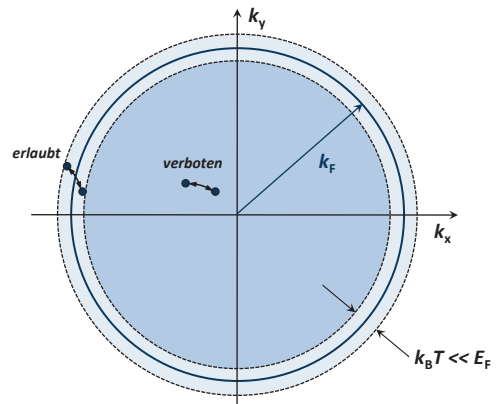


Abb. 7.11: Zur Veranschaulichung des Energiebereichs derjenigen Elektronen, für die Streuprozesse möglich sind. Streuprozesse weit innerhalb der Fermi-Kugel sind durch das Pauli-Prinzip verboten. Nur Elektronen im Energiebereich der Breite  $\sim k_B T$  um die Fermi-Energie können an Streuprozessen teilnehmen.

Hierbei haben wir die mittlere freie Weglänge  $\ell = v_F \tau$  benutzt. Die mittlere freie Weglänge ist die Strecke, die ein Elektron innerhalb der mittleren Zeit  $\tau$  zwischen zwei Streuprozessen zurücklegen kann. Zu beachten ist, dass zur Berechnung von  $\ell$  die tatsächliche Geschwindigkeit der Elektronen, d. h. die Fermi-Geschwindigkeit  $v_F = \hbar k_F / m$  verwendet werden muss, und nicht etwa die mittlere Driftgeschwindigkeit  $v_D$  der Elektronen. Dies liegt daran, dass nur Elektronen in einem schmalen Energieintervall der Breite  $\sim k_B T$  um die Fermi-Energie an Streuprozessen teilnehmen können (siehe Abb. 7.11). Da der maximale Energieübertrag bei einem Stoßprozess in der Größenordnung  $k_B T \ll E_F$  liegt, können Elektronen weit unterhalb der Fermi-Energie keine Streuprozesse machen, da es keine freien Zustände gibt, in die sie gestreut werden könnten. Das Pauli-Prinzip verbietet ja eine Doppelbesetzung. Nur die Elektronen in dem Aufweitungsbereich der Breite  $\sim k_B T$  der Fermi-Kugel, also diejenigen mit  $v \simeq v_F$ , finden freie Zustände und können gestreut werden. Wir wollen schließlich noch darauf hinweisen, dass die in Abb. 7.10 gezeigte Verschiebung  $\delta \mathbf{k}$  der Fermi-Kugel bei moderaten Feldstärken sehr klein ist. Für  $E = 10^2 \text{ V/m}$  und  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$  erhalten wir  $\delta k \simeq 10^3 \text{ cm}^{-1}$ , was verschwindend klein gegenüber  $k_F \simeq 10^8 \text{ cm}^{-1}$  ist (in Abb. 7.10 ist die Verschiebung also viel zu groß dargestellt). Dies zeigt uns, dass der Stromfluss aufgrund des angelegten elektrischen Feldes durch die Umverlagerung eines nur sehr kleinen Bruchteils der Elektronen zustande kommt. Im Gegensatz zum Drude-Modell, wo sich alle Elektronen mit  $v_D$  bewegen und alle zum Stromfluss beitragen, sind dies beim Sommerfeld-Modell nur die wenigen, aber wesentlich schnelleren Elektronen an der Fermi-Fläche.

Die Interpretation des Ergebnisses (7.3.16) für die elektrische Leitfähigkeit ist evident. Wir erwarten natürlich, dass die transportierte Ladungsmenge proportional zu  $ne$  ist. Der Faktor  $e/m$  muss auftauchen, da die Beschleunigung eines Elektrons im elektrischen Feld proportional zu  $e/m$  ist. Die Zeit  $\tau$  bzw. die mittlere freie Weglänge  $\ell = v_F \tau$  beschreibt schließlich das Zeit- bzw. Längenintervall, in dem ein Elektron durch das elektrische Feld beschleunigt werden kann, bevor es durch einen Streuprozess wieder abgebremst wird. Die mittlere freie Weglänge der Elektronen beträgt typischerweise einige 10 bis 100 nm, kann aber bei tiefen Temperaturen und sehr reinen Materialien bis in den cm-Bereich ansteigen. Streuprozesse werden wir im Detail erst in Abschnitt 9.3 diskutieren.

**Anmerkung zum Drude-Modell:** Drude ging ursprünglich von einem klassischen freien Elektronengas aus und erhielt für dieses System ebenfalls das Ergebnis (7.3.16). Die mittlere thermische Geschwindigkeit  $v_{\text{th}} = \sqrt{3k_{\text{B}}T/m}$  in einem solchen klassischen Gas ist bei Raumtemperatur allerdings nur etwa  $10^5$  m/s und damit um mehr als eine Größenordnung kleiner als die Fermi-Geschwindigkeit. Da man durch Messung von  $\sigma$  die Streuzzeit  $\tau$  bestimmt, berechnet man mit  $\ell = v_{\text{th}}\tau$  im Rahmen des Drude-Modells eine sehr kleine mittlere freie Weglänge im Bereich von nur 1 bis 10 Å. Drude nahm deshalb an, dass die Elektronen an den positiven Atomrümpfen gestreut werden. Diese Vorstellung ist natürlich falsch. Wir werden in Kapitel 8 sehen, dass die freie Weglänge für Elektronen (bei  $T = 0$ ) in einem perfekten Kristallgitter unendlich groß wird. Streuprozesse kommen nur aufgrund von Abweichungen von der perfekten periodischen Struktur zustande. Wir wollen schließlich darauf hinweisen, dass im Rahmen des Drude-Modells (kein Pauli-Prinzip) alle Elektronen gestreut werden können, während bei Berücksichtigung des Pauli-Prinzips nur ein kleiner Teil  $T/T_{\text{F}}$  der Elektronen nahe an der Fermi-Kante streuen kann.

#### 7.3.1.4 Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit

Die typische Temperaturabhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstands  $\rho = 1/\sigma$  von Metallen ist in Abb. 7.12 skizziert. Die einzige temperaturabhängige Größe in (7.3.16) ist die Streuzzeit  $\tau$  bzw. die mittlere freie Weglänge  $\ell$ . Um die beobachtete Temperaturabhängigkeit von  $\rho$  zu verstehen, müssen wir die Streuprozesse der Elektronen betrachten. In einfachen Metallen dominieren folgende Streuprozesse:

1. Streuung an Phononen,
2. Streuung an Defekten und Verunreinigungen,
3. Streuung an der Probenoberfläche.

Wirken in einem Material mehrere Streuprozesse parallel, so kann die gesamte Streuzzeit mit Hilfe der empirischen *Matthiessen-Regel* bestimmt werden, nach der sich die Streuraten addieren:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots \quad (7.3.17)$$

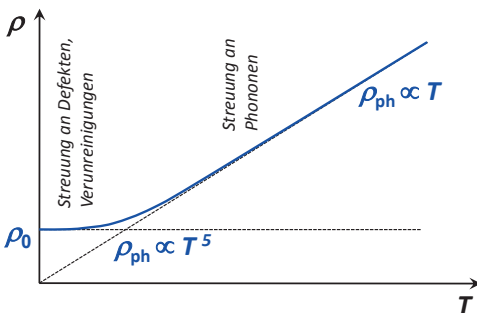


Abb. 7.12: Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands. Bei tiefen Temperaturen dominiert üblicherweise die Streuung an Verunreinigungen und Defekten, bei hohen Temperaturen die Streuung an Phononen.

**Elektron-Phonon-Streuung:** Die Streurrate der Elektron-Phonon-Streuung ist proportional zur mittleren Anzahl  $\langle n \rangle$  der Phononen. Diese ist proportional zu  $T^3$  bei tiefen Temperaturen ( $T \ll \Theta_D$ ) und proportional zu  $T$  für hohe Temperaturen ( $T \gg \Theta_D$ ). Wir erwarten deshalb folgende Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands:

1. Hohe Temperaturen:  $T \gg \Theta_D$ :  
Wegen  $\frac{1}{\tau_{\text{ph}}} \propto \langle n \rangle \propto \frac{T}{\Theta_D}$  erwarten wir

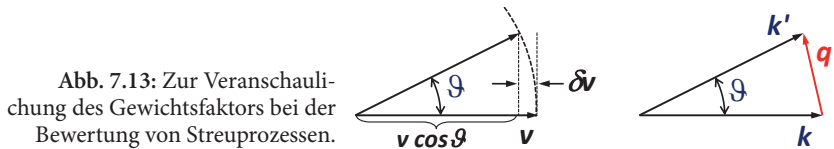
$$\rho_{\text{ph}} \propto T. \quad (7.3.18)$$

2. Tiefe Temperaturen:  $T \ll \Theta_D$ :

Innerhalb eines Debye-Modells (Zustandsdichte  $D(\omega_q) \propto \omega_q^2$ ) erhalten wir für die Zahl der Phononen  $\int_0^{\omega^*} D(\omega_q) d\omega_q \propto \omega^{*3}$ . Mit  $\hbar\omega^* \simeq k_B T$  erhalten wir  $\langle n \rangle \propto T^3$ . Wir erwarten deshalb  $\frac{1}{\tau_{\text{ph}}} \propto \langle n \rangle \propto T^3$  und damit  $\rho_{\text{ph}} \propto T^3$ . Im Experiment beobachtet man allerdings  $\rho_{\text{ph}} \propto T^5$ . Dies liegt daran, dass wir zusätzlich noch einen Gewichtungsfaktor zur Bewertung der Streuprozesse berücksichtigen müssen. Betrachten wir die Streuung um einen Winkel  $\vartheta$  zwischen den Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$  vor und nach der Streuung, so sehen wir aus Abb. 7.13, dass die Geschwindigkeitskomponente in der ursprünglichen Richtung  $v - \delta v = v \cos \vartheta$  ist. Die verlorene relative Driftgeschwindigkeit ist also  $\delta v/v = 1 - \cos \vartheta$ . Da die Streuung um kleine Winkel nur kleine relative Impulsüberträge liefert, muss der zusätzliche Gewichtungsfaktor  $(1 - \cos \vartheta)$  berücksichtigt werden. Für kleine  $\vartheta$  (tiefe Temperaturen) gilt  $(1 - \cos \vartheta) \simeq \vartheta^2 \propto q^2 = \omega_q^2/v_s^2$ , wobei  $v_s$  die Schallgeschwindigkeit ist. Wegen  $\omega_q = k_B T/\hbar$  ist  $(1 - \cos \vartheta) \propto T^2$  und wir erhalten insgesamt

$$\rho_{\text{ph}} \propto T^5. \quad (7.3.19)$$

Eine genauere Diskussion erfolgt später in Abschnitt 9.3.2.



**Streuung an Defekten und Verunreinigungen:** Die Anzahl der Defekte und Verunreinigungen in einer Probe ist temperaturunabhängig. Deshalb erwarten wir einen temperaturunabhängigen Beitrag

$$\rho_0 = \text{const} \quad (7.3.20)$$

zum elektrischen Widerstand. Diesen Beitrag können wir bei sehr tiefen Temperaturen beobachten, wenn der Beitrag durch die Elektron-Phonon-Streuung sehr klein wird. Man nennt diesen temperaturunabhängigen Beitrag auch den *Restwiderstand*. In sehr reinen einkristallinen Proben kann die mittlere freie Weglänge aufgrund von Defekten und Verunreinigungen größer als die Probengröße werden. In diesem Fall müssen wir einen

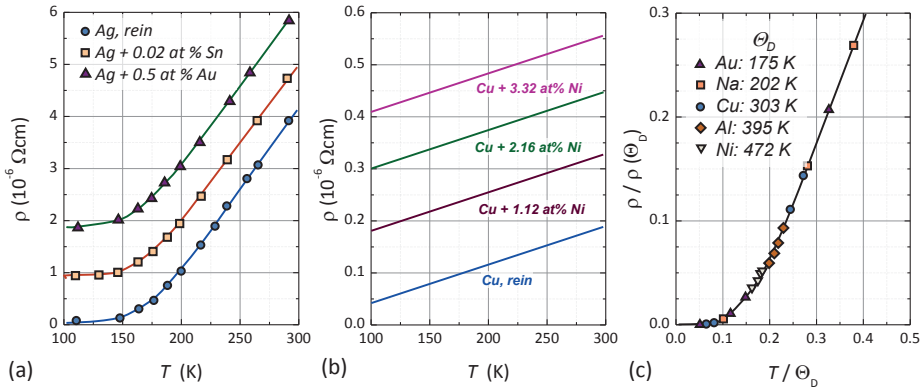


Abb. 7.14: Temperaturabhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstands von verschiedenen Metallen: (a) Ag mit unterschiedlichen Verunreinigungskonzentrationen, (b) Cu mit Ni-Verunreinigung (nach J. Linde, Ann. Phys. 5, 15 (1932)) und (c) reduzierter spezifischer Widerstand gegen reduzierte Temperatur für unterschiedliche reine Metalle (nach D. K. C. MacDonald, in *Handbuch der Physik XIV*, S. Flüge, Hrsg., Springer Verlag (1956)).

weiteren, temperaturunabhängigen Streuprozess berücksichtigen, nämlich die Streuung an der Probenoberfläche.

In Abb. 7.14 sind einige experimentelle Daten zur Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands gezeigt. Fügt man einem reinen Metall Verunreinigungen hinzu, so nimmt der Restwiderstand etwa proportional zum Verunreinigungsgrad zu (siehe Abb. 7.14a und b). Die beobachteten  $\rho(T)$  Kurven werden dann einfach um den höheren Restwiderstand  $\rho_0$  nach oben verschoben. Als Funktion der Temperatur erkennt man den Übergang von  $\rho = \rho_0$  bei tiefen Temperaturen über einen  $\rho \propto T^5$  Bereich zur linearen Temperaturabhängigkeit bei hohen Temperaturen. Normiert man die Temperaturachse auf die Debye-Temperatur  $\Theta_D$  und die Widerstandsachse auf  $\rho(\Theta_D)$ , so erhält man für unterschiedliche Metalle das in Abb. 7.14c gezeigte universelle Temperaturverhalten.

Eine Größe, die sich gut für die Charakterisierung der Reinheit eines elektrisch leitenden Materials eignet, ist das so genannte **Restwiderstandsverhältnis** RRR (residual resistance ratio):

$$RRR = \frac{\rho(300\text{ K})}{\rho_0} . \tag{7.3.21}$$

Für reine Materialien wird der Widerstand bei 300 K durch die Elektron-Phonon-Streuung dominiert. Gleichzeitig wird der Restwiderstand  $\rho_0$  sehr klein und man erhält sehr hohe RRR-Werte von bis zu  $10^6$ . Bei Legierungen wird dagegen auch bei 300 K der Widerstand durch die Verunreinigungsstreuung dominiert und man erhält  $RRR \approx 1$ . Eine weitergehende Diskussion von Streuprozessen und die daraus resultierende Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes erfolgt in Abschnitt 9.3.



## 7.3.2 Thermische Leitfähigkeit

Wie bei der Diskussion des Wärmetransports im Kristallgitter in Abschnitt 6.4 definieren wir die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  des Elektronengases als Proportionalitätskonstante zwischen treibendem Temperaturgradient  $\nabla T$  und resultierender Wärmestromdichte  $\mathbf{J}_h$ :

$$\mathbf{J}_h = -\kappa \nabla T. \quad (7.3.22)$$

In völliger Analogie zur thermischen Leitfähigkeit des Phonongases erhalten wir für das Elektronengas die thermische Leitfähigkeit (vergleiche (6.4.9))

$$\kappa = \frac{1}{3} c_V v^2 \tau. \quad (7.3.23)$$

Setzen wir den Ausdruck  $c_V = \frac{\pi^2}{2} n k_B \frac{T}{T_F}$  (vergleiche (7.2.7),  $n = N/V$ ) für die spezifische Wärme und  $v^2 = v_F^2 = 2E_F/m = 2k_B T_F/m$  für die Geschwindigkeit ein, so erhalten wir

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{n k_B^2 \tau}{m} T. \quad (7.3.24)$$

In Metallen überwiegt die thermische Leitfähigkeit der Elektronen üblicherweise die thermische Leitfähigkeit des Kristallgitters deutlich. Nur in stark verunreinigten oder ungeordneten Metallen wird die Streuzeit  $\tau$  sehr klein und die Wärmeleitfähigkeit des Gitters kann in die gleiche Größenordnung kommen wie diejenige des Elektronensystems. In Tabelle 7.3 sind die experimentellen Werte von  $\kappa(272\text{ K})$  für einige Metalle aufgelistet.

### 7.3.2.1 Das Wiedemann-Franz-Gesetz

Vergleichen wir das Ergebnis (7.3.24) mit demjenigen für die elektrische Leitfähigkeit, so sehen wir, dass das Verhältnis von thermischer und elektrischer Leitfähigkeit des Elektronensystems direkt proportional zur Temperatur ist:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T. \quad (7.3.25)$$

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als *Wiedemann-Franz-Gesetz*.<sup>16,17</sup> Voraussetzung ist, dass die gleichen Streuprozess zum elektrischen und thermischen Widerstand beitragen. Wäre dies nicht der Fall, so würde in den Ausdrücken für  $\kappa$  und  $\sigma$  eine unterschiedliche Streuzeit eingehen.

Die Größe  $\kappa/\sigma T$  ist nach (7.3.25) temperaturunabhängig. Sie wird als *Lorenz-Zahl*<sup>18</sup> bezeichnet:

$$L \equiv \frac{\kappa}{\sigma \cdot T} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.44 \times 10^{-8} \text{ W}\Omega/\text{K}^2. \quad (7.3.26)$$

<sup>16</sup> Gustav Heinrich Wiedemann, deutscher Physiker, geboren am 2. Oktober 1826 in Berlin; gestorben am 23. März 1899 in Leipzig.

<sup>17</sup> Rudolph Franz, deutscher Physiker, geboren am 16. Dezember 1826 in Berlin; gestorben am 31. Dezember 1902 in Berlin.

<sup>18</sup> Ludvig Valentin Lorenz, dänischer Physiker, geboren am 18. Januar 1829 in Helsingør, gestorben am 09. Juni 1891 in Frederiksberg.

**Tabelle 7.3:** Experimentelle Werte der thermischen Leitfähigkeit und der Lorenz-Zahl von Metallen bei 272 K (Quelle: G. W. C. Kaye, T. H. Laby, *Table of Physical and Chemical Constants*, Langmans Green, London (1966)).

Metall	$\kappa$ (W/cm K)	$L$ ( $10^{-8}$ W $\Omega$ /K $^2$ )	Metall	$\kappa$ (W/cm K)	$L$ ( $10^{-8}$ W $\Omega$ /K $^2$ )
Al	2.38	2.14	Na	1.38	2.12
Ag	4.18	2.31	Pb	0.38	2.47
Au	3.10	2.35	Pt	—	2.51
Cd	1.00	2.42	Sn	0.64	2.52
Cu	3.85	2.23	Nb	0.52	2.90
Fe	0.80	2.61	Sb	0.64	2.57
In	0.88	2.58	W	—	3.04
Mo	—	2.61	Zn	1.13	2.31

Wir sehen, dass gute elektrische Leiter auch gute Wärmeleiter und umgekehrt sind. In Tabelle 7.3 sind die Lorenz-Zahlen einiger Metalle aufgelistet. Sie stimmen gut mit dem theoretischen Wert überein.

Experimentell findet man, dass das Wiedemann-Franz-Gesetz immer nur bei hohen Temperaturen (größenordnungsmäßig etwa 100 K) gut erfüllt ist und auch der nach (7.3.26) erwartete Wert der Lorenz-Zahl gemessen wird. Zu tiefen Temperaturen hin nimmt dann allerdings der Wert der Lorenz-Zahl ab und wird bei tiefen Temperaturen wieder konstant. Grund für diese Temperaturabhängigkeit ist eine unterschiedliche Wichtung der Streuprozesse beim elektrischen und thermischen Transport. Für den elektrischen Widerstand kommt es vor allem auf eine effektive Impulsrelaxation der Elektronen an, da der durch das elektrische Feld erzeugte Zusatzimpuls  $\delta\mathbf{k}$  abgegeben werden muss. Dies ist am effektivsten durch Prozesse möglich, bei denen der Impuls von  $\mathbf{k} \simeq +\mathbf{k}$  nach  $\mathbf{k} \simeq -\mathbf{k}$  geändert wird. Diese Prozesse führen zwar auch zu einem thermischen Widerstand. Allerdings kommt es für den thermischen Widerstand vor allem auf eine effektive Energierelaxation an. Ein Temperaturgradient erzeugt nämlich keinen Zusatzimpuls der Elektronen, sondern eine Zusatzenergie. Für eine Energierelaxation sind aber auch Prozesse mit kleiner Impulsänderung (z. B. von  $k_F + \delta k$  nach  $k_F - \delta k$  mit  $\delta k \ll k_F$ ) effektiv. Diese Prozesse, die vor allem bei tiefen Temperaturen wichtig sind, da die Phononenzustände mit hohen Impulsen ausfrieren, tragen wenig zum elektrischen Widerstand bei. Dies erklärt die Abnahme der Lorenz-Zahl mit abnehmender Temperatur.

**Anmerkung zum Drude-Modell:** Wir wollen hier nochmals eine Anmerkung zum klassischen Drude-Modell machen. Ein großer Erfolg dieses Modells war, dass es das Wiedemann-Franz-Gesetz richtig vorhersagte. Dies basierte allerdings auf dem Zufall, dass sich zwei fehlerhafte Annahmen gerade gegenseitig kompensiert haben. Im Drude-Modell wird im Ausdruck  $\kappa = \frac{1}{3}c_V v^2 \tau$  der klassische Dulong-Petit-Wert  $c_V = \frac{3}{2}nk_B$  anstelle des richtigen Werts  $c_V = \frac{\pi^2}{2}nk_B \frac{T}{T_F}$  eingesetzt, d. h. ein um etwa den Faktor  $T/T_F$  zu großer Wert. Dies wird aber wiederum kompensiert, indem die thermische Geschwindigkeit  $v_{th}^2 = 2k_B T/m$  anstelle der richtigen Fermi-Geschwindigkeit  $v_F^2 = 2k_B T_F/m$ , also ein um etwa  $T/T_F$  zu niedriger Wert verwendet wird. Dadurch wird im Drude-Modell durch Zufall der richtige

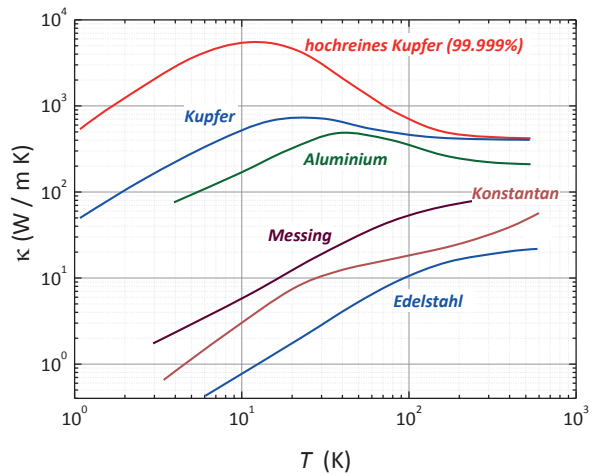


Abb. 7.15: Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von reinen Metallen (Cu, Al) und Legierungen (Messing, Konstantan, Edelstahl).

Ausdruck für die thermische Leitfähigkeit und somit auch das Wiedemann-Franz-Gesetz erhalten.

### 7.3.2.2 Temperaturabhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit

Wir wollen kurz die Temperaturabhängigkeit der elektronischen thermischen Leitfähigkeit diskutieren. Mit Hilfe des Wiedemann-Franz-Gesetzes folgt diese sofort aus der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit. Mit  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  bei sehr tiefen Temperaturen,  $\rho \propto T^5$  für  $T \ll \Theta_D$  und  $\rho \propto T$  für  $T \gg \Theta_D$  erhalten wir

$$\kappa \propto \frac{1}{\rho} T \propto \begin{cases} T & \text{für } T \ll \Theta_D \\ T^{-4} & \text{für } T \ll \Theta_D \\ \text{const} & \text{für } T \gg \Theta_D \end{cases} \quad (7.3.27)$$

Wir erwarten also, dass  $\kappa$  von hohen Temperaturen kommend zunächst konstant ist und dann genügend weit unterhalb von  $\Theta_D$  mit abnehmender Temperatur stark ansteigt, ein Maximum durchläuft und bei sehr tiefen Temperaturen, bei denen die Verunreinigungsstreuung dominiert, proportional zu  $T$  abnimmt. Wir erhalten wie bei der Wärmeleitfähigkeit des Gitters ein Maximum der thermischen Leitfähigkeit, dessen Höhe und Temperatur von der Reinheit der Probe abhängt. Dieses Verhalten ist in Abb. 7.15 für reine Metalle wie Kupfer oder Aluminium zu sehen. Sehr reine Proben (z. B. hochreines Kupfer) haben ein sehr ausgeprägtes Maximum bei tieferen, sehr verunreinigte Proben ein flaches bei höheren Temperaturen. Für Legierungen wird das Maximum völlig unterdrückt, da die mittlere freie Weglänge für den gesamten Temperaturbereich durch die temperaturunabhängige Verunreinigungsstreuung dominiert wird und sehr klein ist. Für sehr reine Proben werden maximale Werte für  $\kappa$  von mehr als 10 000 W/m K erreicht.

Die elektronische Wärmeleitfähigkeit von Metallen ist im Allgemeinen um etwa den Faktor 100 größer als die Wärmeleitfähigkeit des Gitters, so dass letztere experimentell schwierig zu beobachten ist. Der Grund dafür liegt in der sehr effektiven Elektron-Phonon-Streuung.

Diese führt in Metallen zu einer im Vergleich mit Isolatoren viel kleineren mittleren freien Weglänge und damit zu einem sehr kleinen Beitrag der Phononen zur Wärmeleitfähigkeit. Die in Isolatoren dominierende Phonon-Phonon-Streuung ist in Metallen im Vergleich zur Elektron-Phonon-Streuung vernachlässigbar klein. Der Beitrag des Gitters zur Wärmeleitfähigkeit von Metallen kann nur dann beobachtet werden, wenn der elektronische Beitrag stark unterdrückt wird. Dies ist z. B. in Legierungen der Fall, in denen die Elektronen stark an Fremdatomen und Defekten gestreut werden, so dass sie wenig zur Wärmeleitfähigkeit beitragen können.

### 7.3.3 Thermokraft

Bei der Herleitung der Wärmeleitfähigkeit haben wir angenommen, dass kein Ladungstransport stattfindet. Betrachten wir den in Abb. 7.16 gezeigten eindimensionalen metallischen Leiter, dessen Temperatur  $T_1$  am einen Ende größer ist als die Temperatur  $T_2$  am anderen, so erhalten wir im Mittel eine Elektronenbewegung von  $T_1$  nach  $T_2$ . Da die Elektronen aber den Leiter nicht verlassen können, sammeln sie sich bei  $T_2$  an, was zu einem elektrischen Feld  $E_x$  parallel zum Temperaturgradienten  $dT/dx$  führt. Wir definieren nun

$$\mathbf{E} \equiv S \nabla T. \quad (7.3.28)$$

Die Größe  $S$  bezeichnen wir als *Thermokraft* oder *Seebeck-Koeffizienten*.<sup>19,20</sup>

Wir leiten im Folgenden einen Ausdruck für die Thermokraft basierend auf dem einfachen Modell freier Elektronen ab. Eine tiefere Diskussion folgt in Kapitel 9, nachdem wir in Kapitel 8 das Bändermodell entwickelt haben. Um einen Ausdruck für die Thermokraft abzuleiten, betrachten wir unser eindimensionales Modell in Abb. 7.16. Offensichtlich ist wegen  $v_1 \neq v_2$  der Mittelwert der Teilchengeschwindigkeit bei  $x_0$  nicht mehr null. Aufgrund des Temperaturgradienten erhalten wir eine mittlere Diffusionsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung:

$$v_{\text{diff}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} [v(x - v\tau) - v(x + v\tau)]. \quad (7.3.29)$$

Entwickeln wir  $v[T(x)]$  um  $x_0$  und berücksichtigen nur den Term erster Ordnung, d. h.  $v[T(x)] \simeq v(x_0) + \frac{dv}{dx}(x - x_0)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{\text{diff}} &= \frac{1}{2} \left[ v(x_0) + \frac{dv}{dx}(-v\tau) - v(x_0) - \frac{dv}{dx}(v\tau) \right] \\ &= -\tau v \frac{dv}{dx} = -\tau \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\tau}{2} \frac{dv^2}{dT} \frac{dT}{dx}. \end{aligned} \quad (7.3.30)$$

<sup>19</sup> **Thomas Johann Seebeck**, deutsch-baltischer Physiker, geboren am 9. April 1770 in Reval (heute Tallinn), gestorben am 10. Dezember 1831 in Berlin.

<sup>20</sup> Th. J. Seebeck, *Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz* (1822–23), in Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften Nr. 70, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig (1895).

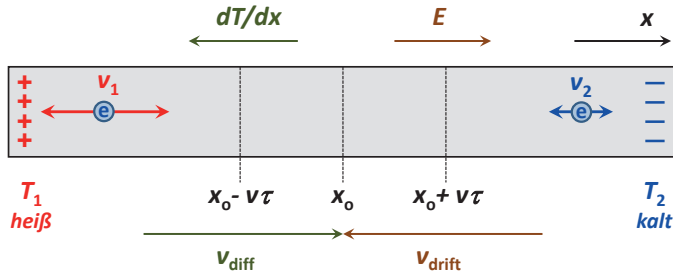


Abb. 7.16: Zur Entstehung der Thermokraft. Als Ladungsträger werden Elektronen mit Ladung  $-e$  angenommen, so dass sich am kalten (heißen) Ende eine Anhäufung negativer (positiver) Ladung ergibt.

Wir können dieses Ergebnis auf drei Dimensionen erweitern, indem wir  $v_x^2$  durch  $\frac{1}{3}v^2$  ersetzen<sup>21</sup> und erhalten

$$\mathbf{v}_{\text{diff}} = -\frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \nabla T. \quad (7.3.31)$$

Durch den Diffusionsstrom baut sich ein elektrisches Feld auf, das einen Driftstrom

$$\mathbf{v}_{\text{drift}} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = -\mu \mathbf{E} \quad (7.3.32)$$

zur Folge hat. Das Minuszeichen resultiert dabei aus der Ladung  $-e$  der betrachteten Ladungsträger (Elektronen). Im stationären Zustand müssen sich der Diffusions- und Driftstrom gerade kompensieren, woraus sich

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dT} \left( \frac{mv^2}{2} \right) \nabla T + e \mathbf{E} = 0 \quad (7.3.33)$$

ergibt. Wir benutzen jetzt noch, dass  $\frac{d}{dT} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = c_V/n$ , also gleich der Wärmekapazität pro Teilchen entspricht, und erhalten

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3ne} c_V \nabla T. \quad (7.3.34)$$

Mit der Definition (7.3.28) der Thermokraft ergibt sich

$$S = -\frac{1}{3ne} c_V = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B}{e} \frac{k_B T}{E_F} = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B}{e} \frac{T}{T_F}. \quad (7.3.35)$$

Hierbei haben wir den Ausdruck (7.2.7) für die spezifische Wärme des freien Elektronengases benutzt. Wir erhalten für die Thermokraft  $S \simeq -142 \mu\text{V/K} \cdot \frac{T}{T_F}$ . Mit  $\frac{T}{T_F} \simeq 10^{-2}$  erhalten wir also Werte im Bereich von  $-1 \mu\text{V/K}$ . Dieser Wert wird in einfachen Metallen in der Tat

<sup>21</sup> Es gilt  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  und außerdem  $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$  für ein isotropes Medium. Deshalb können wir  $v_x^2$  durch  $\frac{1}{3}v^2$  ersetzen.

beobachtet. Allerdings wird die beobachtete Temperaturabhängigkeit und auch das Vorzeichen der Thermokraft im Modell des freien Elektronengases häufig nicht richtig wiedergegeben. Experimentell findet man häufig eine positive Thermokraft. Eine Erklärung dieser Tatsache erfordert die Einbeziehung des Gitterpotenzials in die Transporttheorie (siehe hierzu Kapitel 8). Die im Ausdruck für die Thermokraft auftretenden Terme können wir anschaulich interpretieren. Der Faktor  $T/T_F$  trägt der Tatsache Rechnung, dass nur ein kleiner Bruchteil  $T/T_F$  der Elektronen zu dem Prozess beitragen kann, der zur Thermokraft führt. Der Faktor  $k_B/e$  gibt gerade das Verhältnis der von den einzelnen Elektronen im Mittel transportierten Entropie und Ladungsmenge an. Erstere resultiert aus dem angelegten Temperaturgradienten  $\nabla T$ , letztere führt zu einem elektrischen Feld  $E \propto -\nabla\phi_{el}$ .

**Anmerkung zum Drude-Modell:** Das klassische Drude-Modell liefert einen viel zu hohen Wert für die Thermokraft. Dies resultiert daher, dass man in (7.3.35) den um etwa den Faktor  $T/T_F \sim 100$  zu großen klassischen Wert  $c_V = 3k_B$  für die Wärmekapazität pro Teilchen einsetzt. Im Rahmen des klassischen Modells tragen alle Elektronen zur Thermokraft bei. In Wirklichkeit ist es aber aufgrund des Pauli-Prinzips nur eine kleiner Anteil  $T/T_F$ .

### 7.3.4 Bewegung im Magnetfeld

In Abschnitt 7.3.1 haben wir die Bewegung von Elektronen<sup>22</sup> unter der Wirkung eines elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  diskutiert. Wir wollen diesen Fall nun erweitern, indem wir auch Magnetfelder  $\mathbf{B}$  berücksichtigen. Die auf die Elektronen wirkende Kraft ist dann durch

$$\mathbf{F} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (7.3.36)$$

gegeben. Zusätzlich zur Kraft  $\mathbf{F}_E = -e\mathbf{E}$  durch das elektrische Feld müssen wir die **Lorentz-Kraft**  $\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  berücksichtigen. Für die zeitliche Änderung des mittleren Wellenvektors  $\langle \mathbf{k} \rangle$  aufgrund der wirkenden Kräfte und von Streuprozessen erhalten wir dann (vergleiche (7.3.11))

$$\frac{d\langle \mathbf{k} \rangle}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\hbar} - \frac{\delta \mathbf{k}}{\tau} = -\frac{e[\mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}]}{\hbar} - \frac{\delta \mathbf{k}}{\tau} \quad (7.3.37)$$

Im stationären Zustand muss diese Änderung verschwinden. Mit der mittleren Driftgeschwindigkeit  $\delta \mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\hbar \delta \mathbf{k}}{m}$  erhalten wir also

$$\delta \mathbf{v} = -\frac{e\tau}{m} [\mathbf{E} + \delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}] . \quad (7.3.38)$$

Hierbei erscheint in der Lorentz-Kraft nur die mittlere Zusatzgeschwindigkeit  $\delta \mathbf{v}$ , da diese ja eine mittlere Kraft auf alle Elektronen darstellt. Für  $\mathbf{E} = 0$  können wir im Kristall zu jedem Elektron mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  auch ein Elektron mit Geschwindigkeit  $-\mathbf{v}$  finden, so dass die mittlere Lorentz-Kraft verschwindet. Wir weisen darauf hin, dass die eben gemachte

<sup>22</sup> Wir benutzen im Folgenden wiederum die Elementarladung  $e$  als positive Größe, die Ladung eines Elektrons beträgt also  $-e$ .

Betrachtung nur zur Abschätzung der mittleren Driftgeschwindigkeit und damit des mittleren Driftstromes verwendet werden kann. Eine detaillierte Beschreibung der Bewegung einzelner Elektronen in einem Kristallgitter werden wir erst in Kapitel 9 diskutieren.

Wir nehmen im Folgenden an, dass das Magnetfeld parallel zur  $z$ -Achse ausgerichtet ist. Wir erhalten dann aus Gleichung (7.3.38) für die kartesischen Komponenten von  $\delta\mathbf{v}$ :

$$\delta v_x = -\omega_c \tau \left( \frac{E_x}{B} + \delta v_y \right) \quad (7.3.39)$$

$$\delta v_y = -\omega_c \tau \left( \frac{E_y}{B} - \delta v_x \right) \quad (7.3.40)$$

$$\delta v_z = -\omega_c \tau \left( \frac{E_z}{B} \right). \quad (7.3.41)$$

Hierbei haben wir die *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{m} = 1.76 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot B \text{ [T]} \quad (7.3.42)$$

verwendet.<sup>23</sup> Lösen wir das Gleichungssystem (7.3.39)–(7.3.41) nach  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$  und  $\delta v_z$  auf und führen die Stromdichte  $\mathbf{J}_q = -ne\delta\mathbf{v}$  ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} J_{q,x} \\ J_{q,y} \\ J_{q,z} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ +\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (7.3.43)$$

Hierbei ist

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}. \quad (7.3.44)$$

### 7.3.4.1 Hall-Effekt

Wir betrachten nun die in Abb. 7.17 gezeigte Probenform. Das von außen angelegte elektrische Feld soll in  $x$ -Richtung zeigen, das Magnetfeld in  $z$ -Richtung. Ein Ladungsfluss soll nur

<sup>23</sup> Für  $\tau \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (7.3.37)  $\frac{d(\mathbf{k})}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\hbar} = \frac{-e\mathbf{E}}{\hbar} - \frac{e\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\hbar}$  und somit  $\delta\dot{\mathbf{v}} = \frac{\hbar}{e} \frac{d(\mathbf{k})}{dt} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} - \frac{e\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{m}$ . Wir erhalten damit

$$\delta\dot{v}_x = -\frac{e}{m} E_x - \omega_c \delta v_y$$

$$\delta\dot{v}_y = -\frac{e}{m} E_y + \omega_c \delta v_x$$

$$\delta\dot{v}_z = -\frac{e}{m} E_z.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist eine Kreisbewegung in der  $xy$ -Ebene mit der Kreisfrequenz  $\omega_c$ . Den Fall  $\omega_c \tau \gg 1$  werden wir aber erst später in Kapitel 9 diskutieren. In diesem Fall sind die ebenen Elektronenwellen keine guten Eigenzustände mehr. Wir müssen den Effekt des Magnetfeldes gleich von Anfang an berücksichtigen und neue Eigenzustände berechnen. Für Metalle ist  $\ell \approx 100 \text{ nm}$  bzw.  $\tau = \ell/v_F \approx 10^{-13} \text{ s}$ . Mit  $\omega_c \approx 10^{11} \text{ s}^{-1}$  bei  $B = 1 \text{ T}$  ist für Metalle üblicherweise  $\omega_c \tau \ll 1$ . Dies ändert sich nur bei sehr hohen Magnetfeldern und sehr reinen Proben bei sehr tiefen Temperaturen.

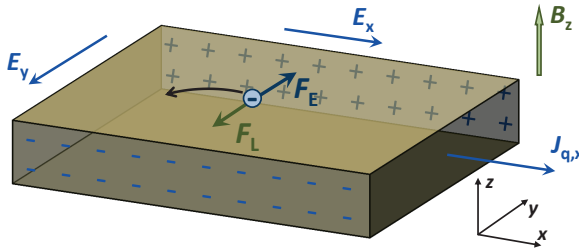


Abb. 7.17: Zur Veranschaulichung des Hall-Effekts. Die Elektronen bewegen sich entgegen der technischen Stromrichtung  $J_q$  in die negative  $x$ -Richtung. Sie werden dabei durch die Lorentz-Kraft in die negative  $y$ -Richtung abgelenkt und bauen ein elektrisches Quersfeld  $E_y$  auf. Im stationären Zustand kompensiert die Kraft  $F_E = -eE_y$  durch das Hall-Feld die Lorentz-Kraft  $F_L = -e\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

in  $x$ -Richtung möglich sein. Aus der Bedingung  $J_{q,y} = 0$  erhalten wir dann aus (7.3.43)

$$\omega_c \tau E_x + E_y = 0 \quad (7.3.45)$$

oder

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{m} E_x = -\mu B E_x. \quad (7.3.46)$$

Wir sehen also, dass sich in der Probe ein elektrisches Quersfeld in  $y$ -Richtung aufbaut. Diese Erscheinung bezeichnen wir als *Hall-Effekt*.<sup>24</sup> Das transversale elektrische Feld nennen wir *Hall-Feld*. Das Hall-Feld kommt dadurch zustande, dass die Elektronen aufgrund der Lorentz-Kraft eine Ablenkung in  $y$ -Richtung erfahren und sich dadurch auf der einen Stirnfläche der Probe ansammeln und von der gegenüberliegenden abwandern. Dieser Prozess hält solange an, bis das entstandene elektrische Feld die Ablenkung der Elektronen im Magnetfeld gerade kompensiert.

Wir können in (7.3.46) mit Hilfe von (7.3.43) das elektrische Feld  $E_x$  auch durch  $J_{q,x}$  ausdrücken und erhalten:

$$E_y = -\frac{eB\tau}{m} E_x = -\mu B E_x = -\frac{eB\tau}{m} \frac{J_{q,x}}{\sigma_0} = R_H B J_{q,x}. \quad (7.3.48)$$

Die Größe

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad (7.3.49)$$

bezeichnen wir als *Hall-Koeffizienten* und

$$\rho_{xy} = \frac{E_y}{J_{q,x}} = R_H B \quad (7.3.50)$$

<sup>24</sup> **Edwin Herbert Hall**, geboren am 7. November 1855 in Great Falls, Maine; gestorben am 20. November 1938 in Cambridge, Massachusetts. 1879 entdeckte Hall im Alter von 24 Jahren den später nach ihm benannten Hall-Effekt. Diese Entdeckung geschah im Zusammenhang mit seiner Doktorarbeit unter Henry Augustus Rowland (1848–1901). Von 1881 bis 1921 forschte er an der Harvard Universität auf dem Gebiet der Thermoelektrizität.



### Messung des Hall-Effekts

Für die Messung des Hall-Effekts verwendet man üblicherweise die in Abb. 7.18 gezeigte Probengeometrie. Man erhält mit obigen Gleichungen sofort, dass die gemessene Hall-Spannung durch

$$U_H = R_H B J_q b = \rho_H J_q b = \frac{\rho_H I}{d} \quad (7.3.47)$$

gegeben ist. Das heißt,  $U_H$  steigt mit zunehmender elektrischer Stromdichte  $J_q$  und zunehmendem Magnetfeld  $B$  sowie mit zunehmender Probenbreite  $b$  an. Da man im Experiment  $B$  und  $J_q$  (z. B. wegen Heizeffekten) nicht beliebig erhöhen kann, muss man die Probenbreite erhöhen, um eine genügend große Hall-Spannung zu erzielen. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass man nicht durch eine gegenseitige Verschiebung der Spannungsabgriffe für  $U_H$  einen longitudinalen Spannungsanteil mitmisst.

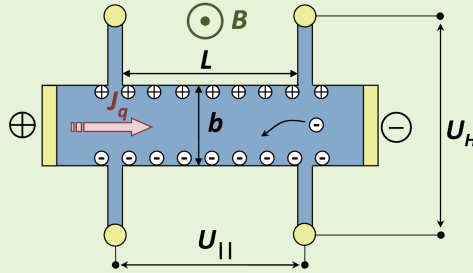


Abb. 7.18: Typische Probengeometrie zur Messung des Hall-Effekts: Hall-Barren mit Länge  $L$ , Breite  $b$  und Dicke  $d$ , das Magnetfeld steht senkrecht auf der Probenebene.

als *spezifischen Hall-Widerstand*. Den Winkel

$$\tan \theta_H = \frac{E_y}{E_x} = \frac{eB\tau}{m} = \sigma_0 R_H \quad (7.3.51)$$

nennen wir *Hall-Winkel*.

Durch Messung der Hall-Konstanten erhalten wir also das Vorzeichen und die Dichte der Ladungsträger im untersuchten Festkörper. Um das Vorzeichen des Hall-Effekts im Detail zu verstehen, müssen wir aber, ähnlich wie bei der Thermokraft, die Bandstruktur des Festkörpers berücksichtigen (siehe hierzu Kapitel 8 und 9).

Das Ergebnis, dass der Hall-Koeffizient proportional zu  $1/ne$  ist, kann mit kinetischen Vorstellungen verstanden werden, wenn wir annehmen, dass die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit  $\delta \mathbf{v}$  driften und dabei die Lorentz-Kraft  $e\delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  senkrecht zum Magnetfeld erfahren. Das transversale elektrische Feld  $\mathbf{E}_H = \mathbf{B} \times \delta \mathbf{v} = \mathbf{B} \times \frac{1}{ne} \mathbf{J}_q$  wird gerade zur Kompensation dieser Ablenkkraft benötigt. Die Proportionalität zu  $1/n$  ergibt sich dabei gerade deshalb, da sich bei einer gegebenen Stromstärke die Ladungsträger umso schneller bewegen müssen, je kleiner die Ladungsdichte ist und daher umso stärker im Magnetfeld abgelenkt werden.

### 7.3.4.2 Vertiefungsthema: Magnetwiderstand

Als Magnetwiderstand bezeichnen wir den magnetfeldabhängigen spezifischen Widerstand  $\rho = \rho(B)$  eines Festkörpers. Je nach relativer Orientierung von Strom- und Magnetfeldrichtung unterscheiden wir zwischen:

$$\begin{array}{ll} \text{longitudinaler Magnetwiderstand} & \rho_{\parallel} \quad \mathbf{B} \parallel \mathbf{J}_q \\ \text{transversaler Magnetwiderstand} & \rho_{\perp} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{J}_q . \end{array} \quad (7.3.52)$$

Die relative Änderung des elektrischen Widerstands als Funktion des angelegten Magnetfeldes

$$\text{MR} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad (7.3.53)$$

wird als *Magnetowiderstandseffekt* oder kurz als MR-Effekt (MR: Magneto Resistance) bezeichnet.

**Transversaler Magnetwiderstand:** Wir betrachten wieder die in Abb. 7.17 gezeigte Geometrie. Der von außen aufgeprägte Strom soll in  $x$ -Richtung fließen und das Magnetfeld soll in  $z$ -Richtung angelegt sein. Mit der Bedingung  $J_{q,y} = 0$  folgt aus (7.3.43)

$$\omega_c \tau E_x + E_y = 0 . \quad (7.3.54)$$

Setzen wir den daraus folgenden Ausdruck für  $E_y$  in (7.3.43) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} J_{q,x} &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x + \omega_c^2 \tau^2 E_x) \\ &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (1 + \omega_c^2 \tau^2) E_x = \sigma_0 E_x . \end{aligned} \quad (7.3.55)$$

Wir sehen also, dass  $\rho(B) = 1/\sigma_0 = \text{const}$  ist. In der gezeigten Konfiguration verschwindet also der transversale Magnetwiderstand.<sup>25</sup> Die Ursache dafür ist, dass die aus dem Hall-Feld  $E_y$  resultierende Kraft  $-eE_y$  die Lorentz-Kraft  $-e\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\delta v_x B_z$  gerade kompensiert. Die Ladungsträger können sich somit mit der Driftgeschwindigkeit  $\delta v_x$  in  $x$ -Richtung bewegen, ohne dass sie die Lorentz-Kraft aufgrund des anliegenden Magnetfeldes spüren. In Experimenten beobachtet man allerdings für alle nicht-magnetischen Metalle immer einen endlichen Magnetwiderstand. Dies zeigt, dass das Bild der freien Elektronen zu einfach ist und wir für die Erklärung des transversalen Magnetwiderstands unser Modell erweitern müssen. Dies können wir z. B. im Rahmen des Modells freier Elektronen durch ein so genanntes *Zweiband-Modell* tun, das wir später in Abschnitt 9.6.2 vorstellen werden. Wir werden in

<sup>25</sup> Man beachte, dass die Randbedingung  $J_{q,y} = 0$  nur für die in Abb. 7.18 gezeigte Probengeometrie erfüllt ist. Wir können aber auch eine andere Konfiguration wählen (z. B. eine Corbino-Scheibe, siehe *The Hall and Corbino Effects*, E. P. Adams, Proc. Am. Phil. Soc. 54, 47–51 (1915)), für welche die Randbedingung  $E_y = 0$  vorliegt. In diesem Fall folgt aus (7.3.43)  $J_{q,x} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} E_x$ , d.h. ein endlicher Magnetwiderstand  $\Delta\rho/\rho \propto B^2$ .



### Plausibilitätserklärung für den Magnetwiderstand:

Wir gehen davon aus, dass die Ladungsträger nach der mittleren Zeit  $\tau$  elastisch gestreut werden. Die Leitfähigkeit ist proportional zur mittleren freien Weglänge  $\ell = v_F \tau$ . Die Ladungsträger bewegen sich zwischen den Streuprozessen auf **Landau-Bahnen** mit Radius  $R_c = v_F m / eB$ , wobei die Umlauffrequenz durch die **Zyklotron-Frequenz**  $\omega_c = eB/m$  gegeben ist (siehe Abb. 7.19)

Mit den Bezeichnungen  $\ell_0 = \tau v_F$ ,  $\ell_0 / R_c = \varphi$  und  $R_c = v_F / \omega_c$  ergibt sich aus Abb. 7.19c für den Grenzfall niedriger Magnetfelder ( $\ell_0 \ll R_c$ )

$$\frac{\ell/2}{R_c} = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 \quad (7.3.56)$$

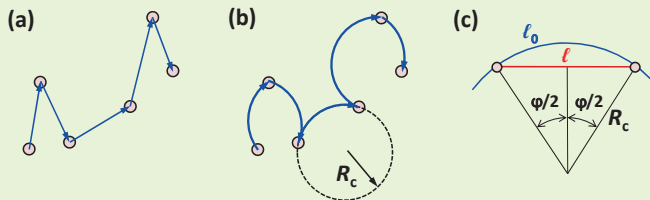
und damit

$$\ell = \ell_0 \left(1 - \frac{1}{24} \tau^2 \omega_c^2\right). \quad (7.3.57)$$

Der spezifische Widerstand  $\rho$  ist reziprok zur effektiven mittleren freien Weglänge  $\ell$  und damit ergibt sich

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\ell_0^{-1} \left(1 - \frac{1}{24} \tau^2 \omega_c^2\right)^{-1} - \ell_0^{-1}}{\ell_0^{-1}}. \quad (7.3.58)$$

Mit  $\sigma = ne^2 \tau / m$  und  $\omega_c = eB/m$  folgt dann  $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{24n^2 e} \left(\frac{B}{\rho_0}\right)^2$ , was der Kohler-Regel entspricht.



**Abb. 7.19:** Driftbewegung von Elektronen ohne (a) und mit (b) Magnetfeld. Vollständige Umläufe auf Landau-Bahnen sind nur bei sehr niedrigen Temperaturen, sehr reinen Proben und hohen Magnetfeldern zu erwarten.

Kapitel 9 aber auch sehen, dass wir bei Berücksichtigung des periodischen Gitterpotenzials und des damit verbundenen Übergangs von freien Elektronen zu Kristallelektronen eine starke Modifikation der Bewegung von Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern erhalten. Dies werden wir in Kapitel 9 genauer diskutieren.

Anschaulich können wir uns den positiven Magnetwiderstand durch eine Verkleinerung der effektiven freien Weglänge  $\ell$  zwischen zwei Stoßereignissen erklären. Die Elektronen bewe-

gen sich nämlich zwischen zwei Stößen (z. B. mit Verunreinigungen oder Phononen) auf gekrümmten Bahnen. Nur die langsame Driftgeschwindigkeit erfolgt geradlinig, da sich die Lorentz-Kraft aufgrund des  $B$ -Feldes und die Kraft aufgrund des Hall-Feldes gerade kompensieren. Wichtig ist, dass die Bewegungsgeschwindigkeit zwischen zwei Stößen der Fermi-Geschwindigkeit entspricht, die wesentlich größer ist als die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen und folglich in einer wesentlich größeren Lorentz-Kraft resultiert. Eine Plausibilitätsbetrachtung zur Verkürzung der mittleren freien Weglänge durch ein transversales Magnetfeld wird im nachfolgenden Kasten gemacht.

Der beobachtete positive Magnetwiderstand folgt der so genannten **Kohler-Regel**<sup>26,27,28</sup>

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} = F\left(\frac{B}{\rho(0)}\right) = F(\omega_c\tau) . \quad (7.3.59)$$

Hierbei ist  $F$  eine Funktion, die von der Art des jeweiligen Metalls abhängt. Da der Magnetwiderstand nicht vom Vorzeichen von  $\mathbf{B}$  abhängen darf, kann die Funktion  $F$  keine lineare Funktion in  $B$  sein. Experimentell beobachtet man in kleinen Feldern meist eine quadratische Abhängigkeit. Eine Plausibilitätsbetrachtung dafür ist im nachfolgenden Kasten gegeben, eine tiefer gehende Diskussion folgt später in Kapitel 9.

Der positive Magnetwiderstand tritt auch in magnetischen Metallen auf, auch wenn er dort teilweise von wesentlich größeren negativen Magnetowiderstandseffekten (der Widerstand nimmt mit zunehmendem Feld ab) überlagert wird. Gleichung (7.3.59) zeigt, dass der positive Magnetwiderstand sehr groß werden kann, wenn  $\rho_0$  sehr klein bzw. die Streuzzeit  $\tau$  sehr groß ist. Dies ist in sehr reinen Metallen bei sehr tiefen Temperaturen der Fall.<sup>29</sup> So nimmt z. B. in reinem Cu oder Ag der Widerstand in angelegten Feldern von etwa 10 T bei niedrigen Temperaturen um bis zu 100% zu.<sup>30</sup> Bei Raumtemperatur ist der positive Magnetwiderstand aber generell klein und deshalb nicht für Anwendungen nutzbar.

**Longitudinaler Magnetwiderstand:** Im Modell der freien Elektronen erwarten wir weder für das Einbandmodell noch für das Zweibandmodell (siehe Abschnitt 9.6.2) einen endlichen longitudinalen Magnetwiderstand, da die Driftbewegung der Ladungsträger ja parallel zum Magnetfeld erfolgt. Dies steht im Widerspruch zu den experimentellen Befunden. Da die Bewegung zwischen den einzelnen Streuprozessen aber in beliebige Richtungen erfolgt und ja nur die mittlere Driftgeschwindigkeit parallel zu  $\mathbf{B}$  ist, können wir die gleiche Plausibilitätsbetrachtung wie beim transversalen Magnetwiderstand machen und damit eine effektive Verkürzung von  $\ell$  und somit endlichen positiven Magnetwiderstand ableiten.

<sup>26</sup> Kohler, *Theorie der magnetischen Widerstandseffekte in Metallen*, Annalen der Physik 32, 211 (1938).

<sup>27</sup> J. M. Ziman, *Electrons and Phonons*, Clarendon Press (1963), p. 491.

<sup>28</sup> Es gilt  $B/\rho(0) = ne \frac{eB}{m} \tau = ne \omega_c \tau$ . Da der Zyklotron-Radius durch  $R_c = \omega_c / v_F$  und die mittlere freie Weglänge durch  $\ell = v_F \tau$  gegeben ist, können wir auch  $B/\rho(0) = ne \frac{\ell}{R_c}$  schreiben.

<sup>29</sup> E. Fawcett, *High-field galvanomagnetic properties of metals*, Advances in Physics 13, 139 (1964).

<sup>30</sup> F. R. Fickett, *Transverse magnetoresistance of oxygen-free copper*, IEEE Trans. Magn. 24, 1156 (1988).

Für das detaillierte Verständnis des longitudinalen Magnetwiderstands benötigen wir die Kenntnis der  $E(\mathbf{k})$ -Abhängigkeiten von Elektronen unter dem Einfluss des periodischen Gitterpotenzials. Wir werden in Kapitel 8 sehen, dass die Flächen konstanter Energie für solche Elektronen eine komplizierte Form annehmen können. Einen longitudinalen Magnetwiderstand erwarten wir nur dann, wenn die Flächen konstanter Energie nicht mehr wie für freie Elektronen kugelsymmetrisch sind. Generell ist die Abhängigkeit des Magnetwiderstands einer einkristallinen Probe eine komplizierte Funktion der Richtung von Strom und Magnetfeld relativ zu den Kristallachsen. Diesen komplexen Zusammenhang wollen wir hier nicht diskutieren.



### 7.3.4.3 Vertiefungsthema: Magnetowiderstandseffekte

Eine Vielzahl weiterer, meist negativer magneto-resistiver Effekte tritt in ferromagnetischen Metallen und Schichtstrukturen aus solchen Metallen auf:<sup>31</sup>

- AMR (Anisotropic MagnetoResistance)
- GMR (Giant MagnetoResistance)
- CMR (Colossal MagnetoResistance)
- TMR (Tunneling MagnetoResistance)
- BMR (Ballistic MagnetoResistance)
- EMR (Extraordinary MagnetoResistance)
- GMI (Giant MagnetoImpedance)

Lange bekannt ist der „*anisotrope magneto-resistive Effekt*“ (AMR), der bereits 1857 durch Thomson entdeckt wurde und in ferromagnetischen Materialien auftritt. Deren spezifischer Widerstand ist parallel zur Magnetisierung einige Prozent größer als senkrecht dazu. Der AMR ist allerdings erst über 100 Jahre nach seiner Entdeckung in die erste technische Anwendung eingeflossen. Dabei handelte es sich um die Leseinheit in Bubblespeichern Ende der 1960er Jahre. Um 1980 wurde mit der Entwicklung der ersten AMR-Sensoren begonnen. In dünnen Schichten aus weichen ferromagnetischen Materialien ist die Magnetisierung leicht drehbar, so dass mit Hilfe des AMR Magnetfeldsensoren realisiert werden können.

Eine rasante Entwicklung der Untersuchung und auch der technischen Nutzung magneto-resistiver Effekte setzte Ende der 1980er Jahre ein, als Peter Grünberg und Albert Fert fast zeitgleich entdeckten, dass der elektrische Strom in Schichtsystemen, die aus ferromagnetischen und nicht-magnetischen, metallischen Schichten bestehen, stark von der relativen Orientierung der Magnetisierung in den ferromagnetischen Schichten abhängt.<sup>32,33,34</sup> Es wurde fest-

<sup>31</sup> siehe z. B. *Spinelektronik*, R. Gross und A. Marx, Vorlesungsskript, Technische Universität München (2004).

<sup>32</sup> P. Grünberg, R. Schreiber, Y. Pang, M. B. Brodsky, H. Sower, *Layered Magnetic Structures: Evidence for Antiferromagnetic Coupling of Fe Layers across Cr Interlayers*, Phys. Rev. Lett. 57, 2442 (1986).

<sup>33</sup> G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach, W. Zinn, *Enhanced magneto-resistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange*, Phys. Rev. B 39, 4828 (1989).

<sup>34</sup> M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, Van Dau Nguyen, F. Petroff, P. Etienne, G. Creuset, A. Friedrich, J. Chazelas, *Giant Magneto-resistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices*, Phys. Rev. Lett. 61, 2472 (1988).

### Peter Grünberg und Albert Fert, Nobelpreis für Physik 2007

Der Physiker **Peter Grünberg** vom Forschungszentrum Jülich und sein französischer Kollege **Albert Fert** von der Universität Paris-Süd erhielten den Nobelpreis für Physik 2007 für ihre Arbeiten zum Riesenmagnetowiderstand (GMR: giant magneto resistance). Ihre Grundlagenforschung legte die Basis für die Entwicklung von leistungsfähigen Lese-Schreibköpfen und damit für die Realisierung von Giga-Byte-Festplatten. Bereits 1997 kam der erste GMR-Lesekopf für Computerfestplatten auf den Markt. Längst hat der GMR-Effekt in verbesserten Leseköpfen für Festplatten, Videobänder sowie in MP3-Playern weltweite Verbreitung gefunden. Ihre Forschung legte den Grundstein für den Forschungsbereich Spintronik, der den quantenmechanischen Spin der Elektronen für die Mikro- und Nanoelektronik nutzbar macht.



© The Nobel Foundation. Photo: Ulla Montan.

Albert Louis François Fert wurde am 7. März 1938 in Carcassonne, Frankreich geboren. Von 1962 bis 1964 war er Assistent an der Universität Grenoble und fertigte seine Abschlussarbeit *Résonance magnétique nucléaire de l'hydrogène absorbé par le palladium* (Kernspinresonanz von auf Palladium absorbiertem Wasserstoff) an. Von 1964 bis 1965 leistete er Wehrdienst, um dann als Oberassistent an die Universität Paris-Süd zu gehen. Dort wurde er 1970 mit einer Arbeit über die Transporteigenschaften von Eisen und Nickel promoviert und übernahm die Leitung einer Forschungsgruppe. Seit 1976 lehrt er dort als Professor. Seit 1995 ist er zusätzlich wissenschaftlicher Direktor des von ihm mitbegründeten gemeinsamen Labors Unité Mixte de Physique seiner Universität und des Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Peter Andreas Grünberg wurde am 18. Mai 1939 in Pilsen geboren. Der Schwerpunkt seiner Forschungen liegt auf dem Gebiet der Festkörperforschung. Ab 1962 studierte er an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main und an der Technischen Universität Darmstadt. Von 1966 bis 1969 war er dort Doktorand und wurde 1969 bei Stefan Hüfner mit der Arbeit *Spektroskopische Untersuchungen an einigen Selten-Erd-Granaten* promoviert. Er verbrachte drei Jahre an der Carleton University in Ottawa, Kanada. Seit 1972 war er Mitarbeiter des Forschungszentrums Jülich und habilitierte sich in Köln. Parallel dazu war er ab 1984 als Privatdozent und ab 1992 als außerplanmäßiger Professor an der Universität zu Köln tätig. Seit seiner Pensionierung im Jahr 2004 arbeitet Grünberg als Gast im Forschungszentrum Jülich im Institut für Festkörperforschung (IFF).

gestellt, dass der elektrische Widerstand der Vielschichtsysteme groß bzw. klein ist, wenn in benachbarten ferromagnetischen Schichten die Magnetisierungsrichtungen antiparallel bzw. parallel ausgerichtet sind (siehe Abb. 7.20). Der damit verbundene, sehr große magnetoresistive Effekt (typischerweise einige 10%) wurde Giant MagnetoResistance (GMR) Effekt genannt. Ein solcher Effekt ist genau das, was gebraucht wird, um die Daten aus Festplatten auszulesen, wobei magnetisch gespeicherte Information in einen elektrischen Strom umge-

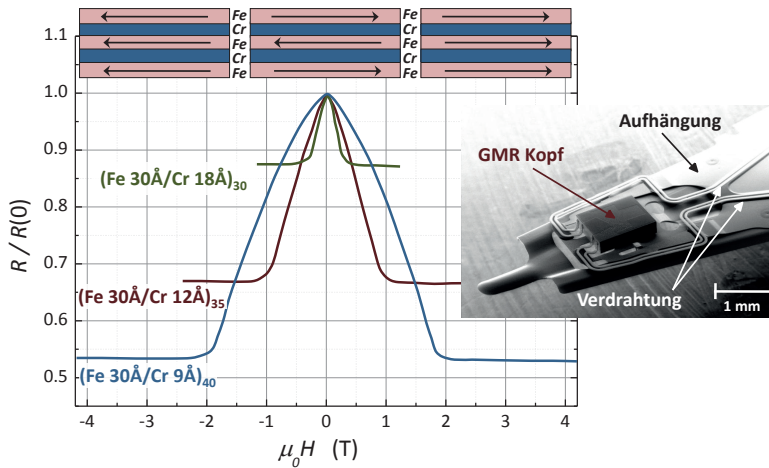


Abb. 7.20: Magnetwiderstand von Fe/Cr-Schichtstrukturen bei 4.2 K. Es wird ein maximaler Magnetwiderstand bei einer Cr-Schichtdicke von 0.9 nm beobachtet. Für diese Schichtdicke liegt im feldfreien Fall eine antiparallele Kopplung der Magnetisierungsrichtungen der Fe-Schichten vor (nach M. N. Baibich *et al.*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2472 (1988)). Rechts ist ein GMR-Lesekopf gezeigt (Quelle: IBM Deutschland).

wandelt werden muss. Daher gingen sehr schnell Wissenschaftler und Techniker daran, den GMR-Effekt für einen Lesekopf auszunützen. Bereits 1997, also nur etwa 10 Jahre nach der Entdeckung des GMR-Effekts, wurde der erste auf diesem Effekt beruhende Lesekopf von der Firma IBM vorgestellt. Diese Konstruktion wurde sehr schnell Stand der Technik und auch viele andere Entwicklungen bauen auf den GMR. Die Entdeckung des GMR-Effekts hat also in kurzer Zeit zu einem großen wirtschaftlichen Erfolg geführt.<sup>35</sup> Für die Entdeckung des Riesenmagnetowiderstands wurde der Nobelpreis für Physik im Jahr 2007 an den Deutschen Peter Grünberg und den Franzosen Albert Fert verliehen.

Weitere magneto-resistive Effekte wie der Colossal MagnetoResistance (CMR) Effekt<sup>36,37,38</sup> oder der Tunneling MagnetoResistance (TMR) Effekt<sup>39,40</sup> werden heute intensiv erforscht. Der TMR kommt bereits heute bei der Realisierung von so genannten Magnetic Random Access Memories (MRAM) zum Einsatz. Hierbei handelt es sich um nichtflüchtige Speicherelemente mit Zugriffszeiten im ns-Bereich.<sup>41,42</sup>

<sup>35</sup> P. Grünberg, *Magnetfeldsensor mit ferromagnetischer dünner Schicht*, Patent-Nr.: P 3820475 (1988).

<sup>36</sup> R. von Helmholtz, J. Wecker, B. Holzapfel, L. Schultz, and K. Samwer, *Giant negative magnetoresistance in perovskite like  $La_{2/3}Ba_{1/3}MnO_x$  ferromagnetic films*, Phys. Rev. Lett. **71**, 2331 (1993).

<sup>37</sup> J. M. D. Coey, M. Viret, S. von Molnar, *Mixed-valence manganites*, Adv. Phys. **48**, 167 (1999).

<sup>38</sup> Y. Tokura (Ed.), *Colossal Magnetoresistive Oxides*, Gordon and Breach Science Publishers, London (1999).

<sup>39</sup> J. S. Moodera, L. R. Kinder, T. M. Wong, R. Meservey, *Large Magnetoresistance at Room Temperature in Ferromagnetic Thin Film Tunnel Junctions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3273 (1995).

<sup>40</sup> T. Miyazaki et al., *Spin polarized tunneling in ferromagnet/insulator/ferromagnet junctions*, J. Magn. Magn. Mat. **151**, 403 (1995).

<sup>41</sup> *Spin Electronics*, M. Ziese and M. J. Thornton eds., Springer Berlin (2001).

<sup>42</sup> *Magnetische Schichtsysteme*, 30. Ferienkurs des Instituts für Festkörperforschung, FZ-Jülich GmbH, Schriften des Forschungszentrums Jülich (1999).

## 7.4 Niedrigdimensionale Elektronengassysteme

Niedrigdimensionale Elektronengassysteme erhalten wir dadurch, dass wir ein dreidimensionales Elektronengas durch Potenzialwalle in einer, zwei oder allen drei Raumrichtungen geometrisch einschränken. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von *Quantum Confinement*. Für die Realisierung von niedrigdimensionalen Elektronengassystemen werden häufig Halbleiter-Heterostrukturen und -Übergitter verwendet, die aus unterschiedlich dotierten Halbleitern oder aus Halbleitern mit unterschiedlicher Energielücke aufgebaut sind (vergleiche hierzu Abschnitt 10.4.1). Sie spielen heute in der Halbleiterphysik eine bedeutende Rolle. Wir wollen im Folgenden die physikalischen Grundlagen des Quantum Confinements und einige Eigenschaften der damit realisierten niedrigdimensionalen Elektronengassysteme diskutieren.

### 7.4.1 Zweidimensionales Elektronengas

Wir betrachten ein dreidimensionales Elektronengas, das in einer Richtung, in unserem Fall in  $z$ -Richtung, durch zwei unendlich hohe Potenzialwalle bei  $z = \pm L/2$  auf einen engen Bereich der Breite  $L$  eingeschränkt wird. Wir schränken also die Wellenfunktion der Elektronen in  $z$ -Richtung stark ein, wogegen die Wellenfunktionen senkrecht zur Einschrankungsrichtung, d. h. in der  $xy$ -Ebene, nach wie vor Bloch-Charakter (vergleiche Kapitel 8) haben sollen.

Das Verschwinden der Wellenfunktion bei  $\pm L/2$  impliziert sofort, dass die möglichen Wellenlängen bzw.  $\mathbf{k}$ -Vektoren in  $z$ -Richtung gegeben sind durch

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.4.1)$$

$$k_{z,n} = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.4.2)$$

Die zugehörigen Energieeigenwerte lauten

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2 k_{z,n}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2. \quad (7.4.3)$$

Wir sehen, dass wir im Vergleich zum Fall ohne Einschränkung in  $z$ -Richtung eine Erhöhung

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 k_{z,1}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \quad (7.4.4)$$

der Grundzustandsenergie erhalten. Wir nennen diese Energieerhöhung *Confinement-Energie*. Sie wächst proportional zu  $1/L^2$  an und ist eine direkte Folge der Einschränkung der Wellenfunktion auf den Bereich  $\Delta z \leq L$ . Diese Einschränkung im Ortsraum erhöhet die Impulsunschärfe auf  $\Delta p_z \geq \hbar/L$ . Die damit verbundene Energieerhöhung ist durch (7.4.4) gegeben.



Um die entsprechenden Wellenfunktionen abzuleiten, benutzen wir die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(z) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (7.4.5)$$

mit

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq z \leq +\frac{L}{2} \\ \infty & \text{für } |z| > \frac{L}{2} \end{cases} . \quad (7.4.6)$$

Mit dem Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}) = \phi_n(z) e^{i(k_x x + k_y y)} = \phi_n(z) e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}} \quad (7.4.7)$$

können wir die Schrödinger-Gleichung in zwei unabhängige Anteile aufspalten:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}} = E_\parallel e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}} \quad (7.4.8)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - eV(z) \right] \phi_n(z) = \epsilon_n \phi_n(z) . \quad (7.4.9)$$

Für die  $xy$ -Richtung erhalten wir ebene Wellen mit den bekannten Energieeigenwerten

$$E_\parallel = \frac{\hbar^2 k_\parallel^2}{2m} . \quad (7.4.10)$$

Für die  $z$ -Richtung erhalten wir die Lösung

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_z n z} & \text{für } -\frac{L}{2} \leq z \leq +\frac{L}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{L}{2} \end{cases} . \quad (7.4.11)$$

mit den Energieeigenwerten (7.4.3). Für die Gesamtenergie erhalten wir somit

$$E_n = E_\parallel + \epsilon_n = \frac{\hbar^2 k_\parallel^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2 . \quad (7.4.12)$$

Wir erhalten also für die Eigenenergien Parabeln entlang von  $k_x$  und  $k_y$  (siehe Abb. 7.21b). Wir bezeichnen diese Parabeln, die für  $\mathbf{k}_\parallel = 0$  die Werte  $\epsilon_n$  besitzen, als 2D-Subbänder. Falls  $L$  sehr klein wird, wird der Abstand der Subbänder wegen  $\epsilon_n \propto 1/L^2$  sehr groß. Die 2D-Subbänder besitzen eine konstante Zustandsdichte (vergleiche (7.1.20) und Abb. 7.2)

$$D_n^{(2D)}(E) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi} \frac{2m}{\hbar^2} = \text{const} & \text{für } E \geq \epsilon_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (7.4.13)$$

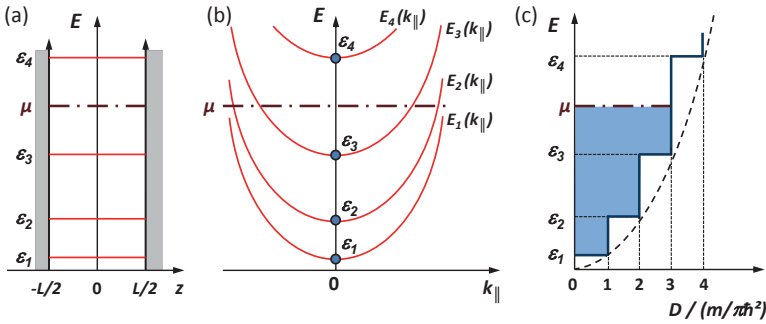


Abb. 7.21: Quantisierung der Energiezustände eines zweidimensionalen Elektronengases in einem Rechteckpotenzial. (a) Potenzialverlauf und resultierende Energieniveaus. (b) Energieparabeln der 2D-Subbänder. (c) Zustandsdichte des zweidimensionalen Elektronengases. Die Zustandsdichte ist die Summe der konstanten Zustandsdichten der einzelnen Subbänder. Die gestrichelte Kurve gibt den Verlauf  $D(E) \propto \sqrt{E}$  eines dreidimensionalen Elektronengases wieder.

Die gesamte Zustandsdichte in allen Subbändern ist gegeben durch

$$D(E) = \sum_n D_n^{(2D)}(E). \quad (7.4.14)$$

Sie ist eine Überlagerung von konstanten Beiträgen, was in der in Abb. 7.21c gezeigten Stufenfunktion resultiert.

Wir möchten darauf hinweisen, dass für die Bestimmung der Eigenenergien  $\epsilon_n$  die exakte Form des Potentials  $V(z)$  notwendig ist. Bei Halbleitern muss dabei die Existenz von Raumladungen berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass  $V(z)$  von der Dichte der freien Elektronen und der ionisierten Dotieratome abhängt und deshalb die Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\phi_n(z)|^2$  in das Potenzial über die Elektronendichte eingeht. Man muss deshalb (7.4.9) selbstkonsistent lösen. In einfachster Näherung können wir jedoch  $V(z)$  durch ein Rechteckpotenzial oder, wie wir später in Abschnitt 10.4.1 für den Fall von modulationsdotierten Heterostrukturen sehen werden, durch ein Dreieckspotenzial annähern. Ferner ist die Annahme unendlich hoher Potenzialwälle nur eine grobe Näherung. Bei endlicher Höhe  $V_0$  des Potenzialwalls erhalten wir Lösungen

$$\phi_n(z) = \begin{cases} a e^{\kappa z} & \text{für } z < -\frac{L}{2} \\ a e^{-\kappa z} & \text{für } z > +\frac{L}{2} \end{cases}, \quad (7.4.15)$$

wobei die charakteristische Abklinglänge  $1/\kappa$  gegeben ist durch:

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\parallel} + V_0). \quad (7.4.16)$$

Die Lösung  $\Psi = \phi_n(z)e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}}$  beschreibt eine Welle, die sich parallel zum Potenzialwall frei ausbreitet und senkrecht dazu exponentiell abklingt. Solche Wellen, deren Wellenvektor in  $z$ -Richtung rein imaginär ist, werden als *evaneszente Wellen* bezeichnet.

### 7.4.2 Eindimensionales Elektronengas

Ein eindimensionales Elektronengassystem können wir durch weitere Einschränkung des zweidimensionalen Elektronengases in der zweiten Dimension, z. B. in  $y$ -Richtung, erhalten. Ein solches Elektronengassystem wird als **Quantendraht** bezeichnet. Mit dem zu (7.4.7) analogen Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}) = \phi_{n_1, n_2}(y, z) e^{ik_x x} \tag{7.4.17}$$

erhalten wir die Eigenenergien

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \epsilon_{n_1, n_2} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_z^2} n_1^2 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_y^2} n_2^2, \tag{7.4.18}$$

wobei die beiden Quantenzahlen  $n_1$  und  $n_2$  die Eigenzustände in der  $yz$ -Ebene charakterisieren. Wir erhalten also parabelförmige 1D-Subbänder, die wir durch die beiden Quantenzahlen  $n_1$  und  $n_2$  klassifizieren können. Für die Zustandsdichte gilt jetzt

$$D(E) = \sum_{n_1, n_2} D_{n_1, n_2}^{(1D)}(E) \tag{7.4.19}$$

mit

$$D_{n_1, n_2}^{(1D)}(E) = \begin{cases} \frac{L}{2\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (E - \epsilon_{n_1, n_2})^{-1/2} & \text{für } E \geq \epsilon_{n_1, n_2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.4.20}$$

Der Verlauf der 1D-Subbänder und der zugehörigen Zustandsdichte ist in Abb. 7.22 gezeigt. Wir sehen, dass die Zustandsdichte Singularitäten aufweist, wo die Ableitung der Dispersionskurven  $E(k_x)$  verschwindet (vergleiche hierzu auch (5.3.31) in Abschnitt 5.3.3).

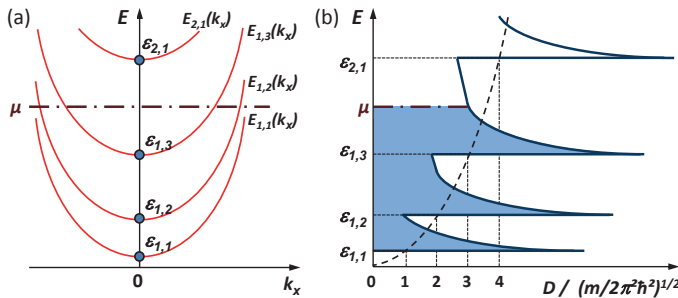


Abb. 7.22: Quantisierung der Energiezustände eines eindimensionalen Elektronengases. (a) Energieparabeln der 1D-Subbänder. (b) Zustandsdichte des eindimensionalen Elektronengases. Die Zustandsdichte ist die Summe der  $1/\sqrt{E - E_{n_1, n_2}}$ -Zustandsdichten der einzelnen Subbänder. Die gestrichelte Kurve gibt den Verlauf  $D(E) \propto \sqrt{E}$  eines dreidimensionalen Elektronengases wieder.

### 7.4.3 Nulldimensionales Elektronengas

Ein nulldimensionales Elektronengassystem können wir durch Einschränkung eines zunächst dreidimensionalen Elektronengases in alle drei Raumrichtungen erhalten. Ein solches Elektronengassystem wird als *Quantenpunkt* bezeichnet. Sein Energiespektrum besteht aus diskreten Niveaus ähnlich zu dem von Atomen und hängt von der detaillierten Form des einschließenden Potentials ab. Man spricht in diesem Zusammenhang deshalb auch von künstlichen Atomen. Die Zustandsdichte ist ebenfalls diskret und kann durch eine Summe von  $\delta$ -Funktionen beschrieben werden.

## 7.5 Transporteigenschaften von niederdimensionalen Elektronengasen

Mit Hilfe des Quantum Confinements können in kontrollierter Weise niedrigdimensionale Elektronengase hergestellt werden. Wir diskutieren im Folgenden den Ladungstransport in null- und eindimensionalen Elektronengasen. Die Transporteigenschaften von zweidimensionalen Elektronengassystemen werden wir erst später in Abschnitt 10.5 im Zusammenhang mit dem Quanten-Hall-Effekt diskutieren.

### 7.5.1 Eindimensionales Elektronengas: Leitwertquantisierung

Die Diskussion des Ladungstransports in eindimensionalen elektrischen Leitern erfolgt in weiten Teilen analog zum Wärmetransport in eindimensionalen Wärmeleitern (vergleiche Abschnitt 6.4.6). Als Hauptergebnis werden wir erhalten, dass der Leitwert solcher Strukturen quantisiert ist. Wir betrachten den in Abb. 7.23 gezeigten eindimensionalen Transportkanal zwischen zwei Elektronenreservoirs mit chemischen Potentialen  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Wir können einen solchen Kanal z. B. dadurch erzeugen, indem wir ein zweidimensionales Elektronengas lateral einschränken, so dass die Breite des Transportkanals kleiner als die Fermi-Wellenlänge wird. Für zweidimensionale Elektronengase in Halbleitern ist dies technisch einfach realisierbar, da hier die Fermi-Wellenlänge aufgrund der geringen Ladungsträgerdichte relativ groß ist. Für Metalle ist dies dagegen sehr schwierig, da die Fermi-Wellenlänge hier im Bereich unterhalb von 1 nm liegt.

Wir nehmen nun an, dass die mittlere freie Weglänge wesentlich größer als die Kanallänge sein soll, so dass in dem Transportkanal keine Streuprozesse stattfinden. Das bedeutet, dass alle Elektronen, die von links oder rechts mit Wellenvektor  $k_l$  oder  $k_r$  in den Kanal eintreten, mit der Wahrscheinlichkeit  $T = 1$  durch den Kanal transmittiert werden. Im Draht treten also keine Streuprozesse auf, die Bewegung der Elektronen erfolgt *ballistisch*. Wir wollen ferner annehmen, dass die Einschnürung des Kanals in  $y$ - und  $z$ -Richtung so stark ist, dass nur, wie in Abb. 7.23 dargestellt ist, das unterste Subband mit Energieeigenwert  $\epsilon_1$  zum Transport beiträgt. Der Ladungstransport erfolgt dann nur in einem einzigen Transportkanal. Abb. 7.23 verdeutlicht ferner, dass eine zwischen den beiden Kontaktreservoirs

angelegte Potenzialdifferenz  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$  wegen der ballistischen Ausbreitung der Elektronen im Transportkanal nicht längs des Kanals abfällt, sondern an der Kontaktfläche zu den Reservoiren. Sie kann deshalb als Kontaktspannung aufgefasst werden. Dadurch besitzen die nach links und rechts laufenden Elektronen unterschiedliche chemische Potentiale, die wir als Quasi-Potentiale bezeichnen. Dies ist anschaulich klar, da die nach links und rechts laufenden Elektronen aufgrund fehlender Streuprozess im Transportkanal nicht im thermischen Gleichgewicht sind.

Nach (7.3.6) ist der Strom durch den eindimensionalen Transportkanal gegeben durch

$$\mathbf{I}_q = -e \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar(\mathbf{k}^l - \mathbf{k}^r)}{m} \quad (7.5.1)$$

Hierbei sind  $\mathbf{k}^l$  und  $\mathbf{k}^r$  die Wellenvektoren der nach links und rechts laufenden Elektronen. Für  $\mu_1 = \mu_2$  ergibt die Summe exakt null und wir erhalten keinen Nettostrom. Die Summation über den Spin-Freiheitsgrad ergibt einen Faktor 2 und wir ersetzen  $\sum_{\mathbf{k}}$  durch  $\int Z^{(1D)}(k) dk$ . Mit  $Z^{(1D)} = L/2\pi$  erhalten wir

$$\mathbf{I}_q = -\frac{2e}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} [f^l(\mathbf{k}) - f^r(\mathbf{k})] dk \quad (7.5.2)$$

Hierbei haben wir die Differenz  $\mathbf{k}^l - \mathbf{k}^r$  durch die Differenz der Besetzungszahlen ausgedrückt. Wir ersetzen nun  $dk$  durch  $dE/\hbar v_k$  und erhalten

$$\mathbf{I}_q = -\frac{2e}{2\pi\hbar} \int_0^\infty (f(E - \mu_1) - f(E - \mu_2)) dE \quad (7.5.3)$$

Hierbei haben wir die Besetzungszahlen  $f^l$  und  $f^r$  durch  $f(E - \mu_1)$  und  $f(E - \mu_2)$  ersetzt. Interessant ist hierbei, dass die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen  $v_k = \hbar k/m$  gerade

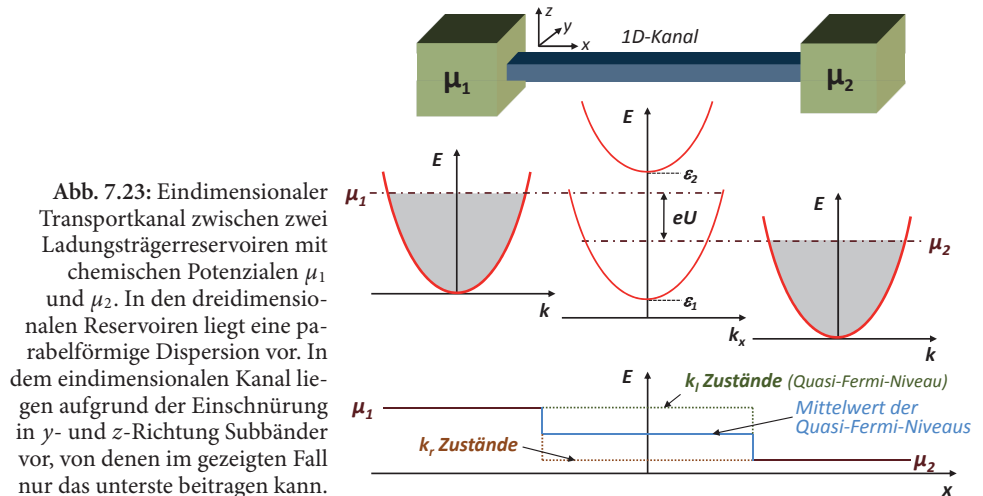
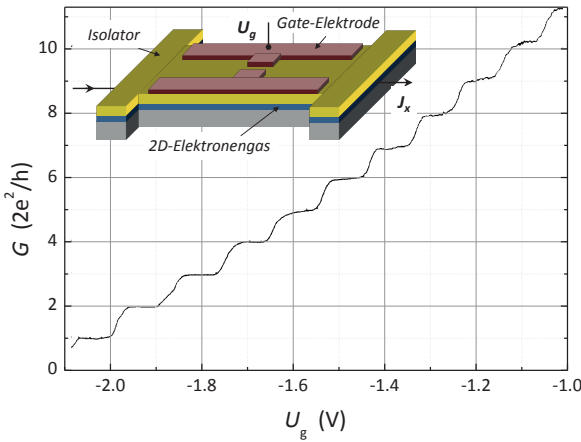


Abb. 7.23: Eindimensionaler Transportkanal zwischen zwei Ladungsträgerreservoiren mit chemischen Potentiale  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . In den dreidimensionalen Reservoiren liegt eine parabolische Dispersion vor. In dem eindimensionalen Kanal liegen aufgrund der Einschnürung in y- und z-Richtung Subbänder vor, von denen im gezeigten Fall nur das unterste beitragen kann.



**Abb. 7.24:** Leitwertquantisierung in einem ballistischen-Quanten-Punkt-Kontakt bei  $T = 0.6$  K. Der Quanten-Punkt-Kontakt wurde in einem zweidimensionalen Elektronengas in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur erzeugt (nach B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848–850 (1988)).

herausfällt. Dies ist völlig analog zum thermischen Transport (vergleiche (6.4.30)), bei dem die Gruppengeschwindigkeit der Phononen herausfällt. Das Integral über die Differenz der Fermi-Funktionen ergibt gerade  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = (-e)U$  und wir erhalten

$$I_q = 2 \frac{e^2}{h} U \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{1}{2} \frac{h}{e^2}. \quad (7.5.4)$$

Wir sehen, dass der perfekt durchlässige eindimensionale Transportkanal (Transmissionswahrscheinlichkeit  $T = 1$ ) den endlichen Leitwert  $G = 2 \frac{e^2}{h} = 2G_Q$  bzw. den Widerstand  $R = \frac{1}{2} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{2} R_Q$  besitzt, wobei der Faktor 2 im Leitwert bzw. der Faktor 1/2 im Widerstand aus der Spin-Entartung resultiert. Die Größe

$$R_Q = 25\,812.807\,4434\,(84)\,\Omega \quad (7.5.5)$$

bezeichnen wir als *Widerstandsquantum*. Da diese Größe erstmals im Zusammenhang mit dem Quanten-Hall-Effekt von **Klaus von Klitzing** mit großer Genauigkeit gemessen wurde, wird sie auch *von Klitzing Konstante* genannt. Bei endlicher Rückstreuungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{R} > 0$  bzw. Transmissionswahrscheinlichkeit  $\mathcal{T} < 1$  erhalten wir

$$G = 2 \frac{e^2}{h} \mathcal{T} \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{1}{2} \frac{h}{e^2} \frac{1}{\mathcal{T}}. \quad (7.5.6)$$

Die durch (7.5.6) gegebene Leitwertquantisierung wurde erstmals in so genannten Quantenpunktkontakten beobachtet, die eindimensionale Elektronengase in Halbleiter-Heterostrukturen darstellen (siehe Abb. 7.24). Dabei wird das eindimensionale Elektronengas durch laterale Einschnürung eines zweidimensionalen Systems in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur mittels in der Mitte aufgetrennten Gate-Elektroden (Split-Gate) erzeugt. Unter der Gate-Elektrode wird durch Anlegen einer negativen Gate-Spannung das Elektronengas unterdrückt, so dass der Stromfluss auf einen eindimensionalen Kanal eingeschränkt wird. Bei der Messtemperatur von 0.6 K ist die mittlere freie Weglänge von etwa  $8\,\mu\text{m}$  wesentlich größer als die Länge des Kanals, so dass die Elektronen ohne Stöße den Kanal durchqueren können. Die

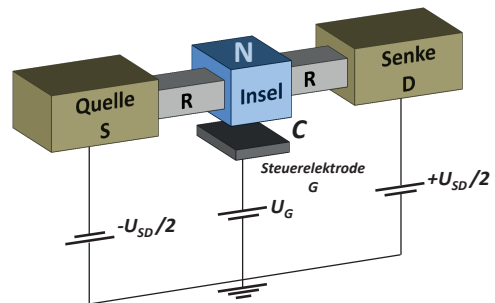
Fermi-Wellenlänge beträgt aufgrund der geringen Ladungsträgerdichte des zweidimensionalen Elektronengases etwa 40 nm. Die Breite des Kanals kann durch Variation der negativen Gate-Spannung verändert werden. Bei  $U_g \leq -2.2$  V ist der Kanal vollkommen geschlossen, so dass kein Stromfluss stattfinden kann. Wird nun  $U_g$  reduziert, so wird ein Leitungskanal nach dem anderen geöffnet und der gemessene Leitwert steigt in Stufen an. Aufgrund der Spin-Entartung im Nullfeld werden Leitwertstufen mit Abstand  $2e^2/h$  beobachtet. Das sukzessive Öffnen der Leitungskanäle kann leicht in Rahmen von Abb. 7.23 verstanden werden. Wird die negative Gate-Spannung reduziert, so wird der Kanal breiter, wodurch die Energiewerte  $\epsilon_i$  der Subbänder nach unten verschoben werden. Somit tragen nach und nach immer mehr Subbänder zum Transport bei, jedes beitragende Subband entspricht einem offenen Leitungskanal.



## 7.5.2 Vertiefungsthema: Nulldimensionales Elektronengas: Coulomb-Blockade

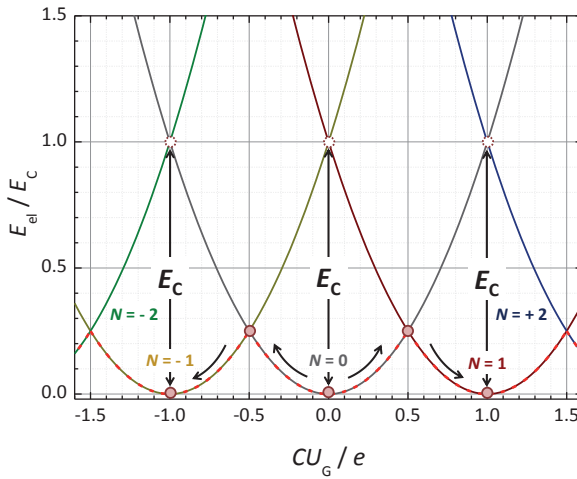
Abschließend wollen wir noch den Transport über eine nulldimensionale Struktur, einen so genannten Quantenpunkt, betrachten. Bevor wir das tun, müssen wir uns aber zuerst mit Ladungseffekten beschäftigen, deren Ursache rein klassischer Natur ist. Diese Effekte treten auch beim Transport über kleine dreidimensionale Elektronensysteme auf. Um uns die Ursache von Ladungseffekten klar zu machen, betrachten wir die in Abb. 7.25 gezeigte Konfiguration. Hier ist eine kleine metallische Insel (diese soll zunächst dreidimensional sein) über große Widerstände  $R$  (üblicherweise verwendet man Tunnelbarrieren) an zwei metallische Kontakte, die wir Quelle  $S$  (Source) und Senke  $D$  (Drain) nennen, angekoppelt. Ferner können wir die Insel über eine kapazitiv gekoppelte Steuerelektrode  $G$  (Gate) beeinflussen. Legen wir eine Spannung  $U_{SD}$  an und messen den resultierenden Strom  $I_{SD}$  als Funktion der Steuerspannung  $U_G$ , so stellen wir fest, dass der Leitwert  $G = I_{SD}/U_{SD}$  scharfe Maxima aufweist, die einen etwa konstanten Abstand besitzen. Die Ursache für diesen Effekt ist rein klassischer Natur und beruht auf der Tatsache, dass jedes Elektron die diskrete Ladung  $-e$  transportiert.

Abb. 7.25: Äquivalenter Schaltkreis für die Untersuchung des Ladungstransports über eine kleine metallische Insel. Die Insel ist über die Widerstände  $R$  an die Quelle  $S$  und Senke  $D$  und kapazitiv an eine Steuerelektrode  $G$  angekoppelt. Die Spannung  $U_{SD}$  zwischen Quelle und Senke ist symmetrisch angelegt. Mit der Steuerspannung  $U_G$  kann die potenzielle Energie der Insel verschoben werden.



Um die experimentelle Beobachtung zu verstehen, betrachten wir zuerst die elektrostatische Energie der Insel. Sie ist gegeben durch

$$E_{\text{el}} = \frac{Q^2}{2C} - QU_G = \frac{(Ne)^2}{2C} - NeU_G. \quad (7.5.7)$$



**Abb. 7.26:** Elektrostatikenergie einer kapazitiv an eine Steuerelektrode gekoppelten metallischen Insel als Funktion der Steuerspannung  $U_G$  und der Elektronenzahl  $N$  auf der Insel. Zwei benachbarte Parabeln  $E_{el}(N+1)$  und  $E_{el}(N)$  schneiden sich bei  $U_G = (N+1/2)e/C$ . Bei  $U_G = Ne/C$  beträgt der energetische Abstand  $E_C$ .

Hierbei ist  $N$  eine ganze Zahl und  $Q = Ne$  die bezüglich des ladungsneutralen Zustands fehlende oder überschüssige Ladung auf der Insel. Wichtig ist, dass aufgrund der diskreten Natur der Elementarladung die Ladung  $Q$  auf der Insel nur diskrete Werte annehmen kann. Der erste Term in (7.5.7) gibt die kapazitive Ladungsenergie an und der zweite die potenzielle Energie durch die Steuerspannung  $U_G$ . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die gesamte kapazitive Kopplung der Insel an die Umgebung durch die Kapazität  $C$  der Steuerelektrode erfolgt. Wir können Gleichung (7.5.7) durch Ausklammern von  $e^2/2C$  umformen und erhalten

$$E_{el} = \frac{e^2}{2C} \left( N - \frac{CU_G}{e} \right)^2 - \left( \frac{CU_G}{e} \right)^2. \quad (7.5.8)$$

Lassen wir den letzten Term, der unabhängig von  $N$  ist weg, so erhalten wir die elektrostatikenergie

$$E_{el}(N) = E_C \left( N - \frac{CU_G}{e} \right)^2 \quad (7.5.9)$$

mit der charakteristischen Energie  $E_C = e^2/2C$ , die gerade der Ladungsenergie einer Elementarladung auf der Kapazität  $C$  entspricht. Tragen wir  $E_{el}(N)$  gegen  $CU_G/e$  auf, so erhalten wir, wie in Abb. 7.26 gezeigt ist, für jedes  $N$  eine Parabel. Wir sehen, dass sich benachbarte Parabeln  $E_{el}(N)$  und  $E_{el}(N+1)$  bei  $U_G = (N+1/2)e/C$  schneiden. Bei dieser Steuerspannung kann folglich die Ladung der Insel ohne Energieaufwand um eine Elementarladung geändert werden. Dagegen müssen wir bei der Spannung  $U_G = Ne/C$  die Energie  $E_C$  aufbringen, um die Inselladung um eine Elementarladung zu ändern. Für  $eU_{SD} \ll E_C$  wird deshalb kein Ladungsfluss über die Insel möglich sein, da die hohe Coulomb-Energie Änderungen des Ladungszustandes unterdrückt. Wir nennen diesen Effekt **Coulomb-Blockade**. Den Energieunterschied benachbarter Parabeln können wir aus (7.5.9) zu

$$E_{el}(N \pm 1) - E_{el}(N) = 2 \left( \pm N + \frac{1}{2} \mp \frac{CU_G}{e} \right) E_C \quad (7.5.10)$$

berechnen.



Um den Coulomb-Blockade-Effekt beobachten zu können, müssen wir sicherstellen, dass Änderungen des Ladungszustandes nicht durch thermische oder Quantenfluktuationen ermöglicht werden. Thermische Fluktuationen spielen dann keine Rolle, wenn  $k_B T \ll E_C$  ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$T \ll \frac{e^2}{2k_B C} \quad \text{oder} \quad C \ll \frac{e^2}{2k_B T}. \quad (7.5.11)$$

Setzen wir Zahlen ein, so sehen wir, dass  $C = 1$  fF einer Temperatur von 1 K entspricht. Selbst wenn wir extrem kleine Kapazitäten verwenden, müssen wir die Probe also noch auf tiefe Temperaturen abkühlen. Wenn es uns aber gelingt, Kapazitäten im aF-Bereich zu realisieren, können wir den Coulomb-Blockade-Effekt auch bei Raumtemperatur beobachten. Um eine obere Grenze für die Größe der in Abb. 7.25 gezeigten Insel abzuschätzen, können wir die potenzielle Energie ausrechnen, die wir aufbringen müssen, um eine Elementarladung aus dem Unendlichen auf eine Kugel mit Radius  $R$  zu bringen. Diese Energie beträgt  $e^2/\epsilon_0 R$ , die äquivalente Kapazität  $C = \epsilon_0 R/2$ . Damit diese Energie groß gegen  $k_B T$  wird, muss  $R \ll e^2/\epsilon_0 k_B T$  sein. Für  $T = 1$  K erhalten wir  $R \ll 100 \mu\text{m}$ . In der Praxis müssen allerdings metallische Inseln üblicherweise Abmessungen im 100 nm-Bereich haben, um  $C = 1$  fF zu erreichen. Da die Fermi-Wellenlänge von Metallen im Å-Bereich liegt, stellt eine metallische Insel mit diesen Abmessungen aber immer noch ein dreidimensionales Elektronensystem dar. Der Niveaubandabstand  $\Delta E \sim E_F/n_{el} V$  der Elektronenzustände liegt aufgrund der hohen Elektronendichte  $n_{el}$  in Metallen bei einem würfelförmigen Volumen mit Kantenlänge 100 nm im  $\mu\text{eV}$ -Bereich und ist somit wesentlich kleiner als  $E_C \sim 0.1\text{--}1$  meV oder  $k_B T \sim 100 \mu\text{V}$  bei 1 K. Wir können deshalb in guter Näherung von einem kontinuierlichen Energiespektrum ausgehen. Das zeigt uns, dass der hier betrachtete Coulomb-Blockade-Effekt nichts mit Quantum-Confinement zu tun hat und ein rein klassischer Effekt aufgrund des diskreten Werts der Elementarladung ist.

Selbst bei  $T = 0$  führt die Tatsache, dass die Ladung im Mittel nur eine Zeit  $\Delta t = R_g C/2\pi$  auf der Insel bleibt, zu einer Energieunschärfe  $\Gamma = h/R_g C$  der Ladungsenergie. Hierbei ist  $R_g = R/2$  der gesamte Widerstand, mit dem die Insel an die Umgebung gekoppelt ist. Diese Unschärfe muss klein gegen  $E_C$  sein, was gleichbedeutend mit

$$R_g \gg \frac{h}{e^2} = R_Q \quad (7.5.12)$$

ist. Der Widerstand  $R_g$  muss also groß gegenüber dem Quantenwiderstand  $R_Q$  sein, um zu vermeiden, dass Quantenfluktuationen die Beobachtbarkeit des Coulomb-Blockade-Effekts verhindern.

Wir wollen nun im Detail diskutieren, was bei einer Variation der Steuerspannung  $U_G = 0$  passiert. Variieren wir die Steuerspannung beginnend von  $U_G = 0$  in positive oder negative Richtung, so wandern wir zunächst auf der  $N = 0$  Parabel nach oben, bis wir den Schnittpunkt mit der  $N = +1$  oder  $N = -1$  Parabel erreichen. Die Ladung auf der Insel ändert sich dann sprunghaft um  $\pm e$  und wir wandern auf der  $N = +1$  bzw.  $N = -1$  Parabel wieder nach unten. Bei einer Variation von  $U_G$  folgen wir also der in Abb. 7.26 rot gestrichelten Kurve, die den Grundzustand des Systems darstellt. Die Ladung auf der Insel ändert sich dabei jeweils bei  $U_G = (N + 1/2)e/C$  sprunghaft um  $\pm e$  und bleibt dazwischen konstant. Dies ist

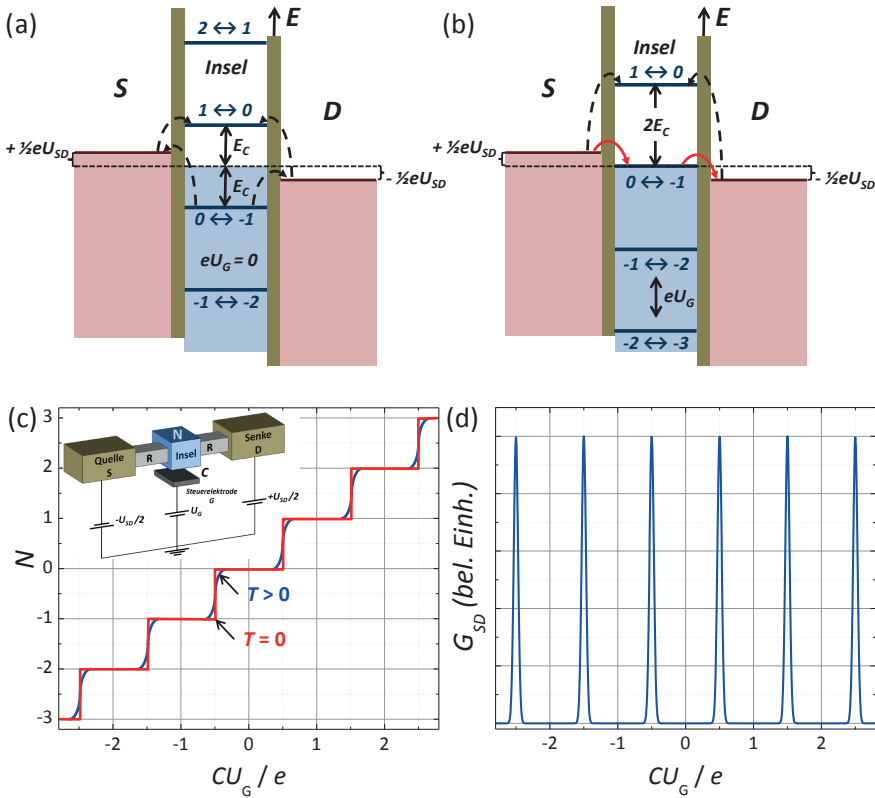


Abb. 7.27: Plausibilitätsbetrachtung zum Ladungstransport über eine metallische Insel für (a)  $U_G = 0$  und (b)  $U_G = e/2C$ . Die blauen Linien im Bereich der Insel markieren die Änderung der potenziellen Energie bei der durch die Zahlen bezeichneten Änderung der Ladungszahl. Durch Variation von  $U_G$  werden diese Linien entsprechend (7.5.10) nach oben oder unten verschoben. Die gestrichelten Pfeile markieren verbotene, die durchgezogenen erlaubte Transportprozesse. In (c) ist die Änderung der Ladungszahl  $N$  auf der Insel bei Variation der Steuerspannung  $U_G$  gezeigt. In (d) ist der Leitwert  $G_{SD} = I_{SD}/U_{SD}$  als Funktion der Steuerspannung  $U_G$  bei einer konstanten Spannung  $U_{SD} \ll E_C/e$  aufgetragen.

in Abb. 7.27(c) gezeigt. Aufgrund von thermischen und Quantenfluktuationen sind die im Experiment beobachteten Sprünge immer mehr oder weniger stark verrundet.

Wir müssen jetzt noch den Ladungstransport zwischen Quelle und Senke diskutieren. Hierbei wollen wir annehmen, dass  $eU_{SD} \ll E_C$ . Bei  $T = 0$  kann Ladungstransport nur dann stattfinden, wenn beim Transport auf die Insel und von der Insel keine Energie benötigt wird. In Abb. 7.27(a) ist die Situation für  $U_G = 0$  gezeigt. Die Insel befindet sich im ladungsneutralen Zustand ( $N = 0$ ). Die Änderung dieses Ladungszustandes nach  $N = +1$  oder  $N = -1$  verschiebt die potenzielle Energie der Insel gemäß (7.5.10) um  $+E_C$  bzw.  $-E_C$ . Die entsprechenden Niveaus sind in Abb. 7.27(a) und (b) durch die waagrechten blauen Linien markiert. Alle durch die gestrichelten Pfeile angedeuteten Transportprozesse auf die oder von der Insel kosten Energie und sind energetisch nicht möglich. Es findet kein Ladungstransport statt,

wir befinden uns also im Bereich der Coulomb-Blockade. Ladungstransport würde erst dann einsetzen, wenn wir die Spannung  $U_{SD}$  auf den Schwellwert  $U_{SD}^* = 2E_C/e = e/C$  erhöhen würden. Nehmen wir eine  $I_{SD}(U_{SD})$ -Kennlinie für  $U_G = 0$  auf, so findet im gesamten Bereich zwischen  $-U_{SD}^*$  und  $+U_{SD}^*$  kein Ladungstransport statt. Dieser Spannungsbereich stellt den Blockade-Bereich dar.

In Abb. 7.27(b) ist die Situation für  $U_G = e/2C$  gezeigt. Für diese Steuerspannung bewirkt gemäß (7.5.10) die Änderung des Ladungszustandes von  $N = 0$  nach  $N = -1$  keine Verschiebung der potenziellen Energie. Das entsprechende Niveau liegt deshalb bei der Fermi-Energie. Wie Abb. 7.27(b) zeigt, können in diesem Fall Elektronen für beliebig kleine  $U_{SD}$  von der Insel in die Senke wandern und von links aus der Quelle wieder nachgefüllt werden (durchgezogene rote Pfeile). Das heißt, für diese Steuerspannung verschwindet der Blockade-Bereich vollkommen und wir erwarten ein scharfes Maximum für den Leitwert  $G_{SD} = I_{SD}/U_{SD}$ . Äquivalente Maxima erhalten wir für  $U_G = (N + 1/2)e/C$ . Dies ist in Abb. 7.27(d) gezeigt. Das Auftreten der äquidistanten Leitwertmaxima können wir uns anschaulich so erklären, dass wir mit der Steuerspannung die in Abb. 7.27(b) eingezeichneten Energieniveaus vertikal verschieben können. Einen Leitwertpeak erhalten wir immer dann, wenn ein Niveau zwischen den chemischen Potenzialen von Quelle und Senke zu liegen kommt. Es sei noch angemerkt, dass durch die endlichen Energien  $k_B T$ ,  $eU_{SD}$  und  $\Gamma$  die scharfen Maxima je nach experimentellen Begebenheiten mehr oder weniger stark verrundet werden.

Wir müssen uns jetzt noch fragen, was passiert, wenn wir die Insel so klein machen, dass wir aufgrund von Quanten-Confinement einen Übergang zu einem quasi-nulldimensionalen Elektronensystem mit einem diskreten Energiespektrum erhalten. Der Niveauabstand der Elektronenzustände kommt dann bei genügend kleinen Systemen in den Bereich der Ladungsenergie  $E_C$  und wir können bei der Diskussion der Ladungseffekte nicht mehr von einem kontinuierlichen Energiespektrum ausgehen. Dies manifestiert sich darin, dass die Maxima in der gemessenen  $I_{SD}(U_{SD})$ -Kennlinie nicht mehr äquidistant sind. Sie zeigen vielmehr für jede Probe charakteristische Abstände, die das Niveauschema der untersuchten Probe widerspiegeln. Weitere interessante Effekte kommen durch den Spin der Elektronen und angelegte Magnetfelder zustande, die wir aber hier nicht diskutieren wollen.



## Literatur

- N. W. Ashcroft, N. D. Mermin, *Festkörperphysik*, Oldenbourg Verlag, München (2012).
- M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, Van Dau Nguyen, F. Petroff, P. Etienne, G. Creuset, A. Friedrich, J. Chazelas, *Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2472 (1988).
- G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach, W. Zinn, *Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange*, Phys. Rev. B **39**, 4828 (1989).
- J. M. D. Coey, M. Viret, S. von Molnar, *Mixed-valence manganites*, Adv. Phys. **48**, 167 (1999).

- P. Drude, *Zur Elektronentheorie der Metalle, I. Teil, II. Teil, und Berichtigung*, Annalen der Physik 1, 556–613 (1900); *ibid* 3, 369–402 (1900); *ibid* 7, 687–692 (1902).
- E. Fawcett, *High-field galvanomagnetic properties of metals*, Advances in Physics 13, 139 (1964).
- F. R. Fickett, *Transverse magnetoresistance of oxygen-free copper*, IEEE Trans. Magn. 24, 1156 (1988).
- Z. Fisk, H. R. Ott, T. M. Rice, J. L. Smith, *Heavy-electron metals*, Nature 20, 124–129 (1986).
- R. Gross, A. Marx, *Spinelektronik*, Vorlesungsskript, Technische Universität München (2004).
- P. Grünberg, *Magnetfeldsensor mit ferromagnetischer dünner Schicht*, Patent-Nr.: P 3820475 (1988).
- P. Grünberg, R. Schreiber, Y. Pang, M. B. Brodsky, H. Sower, *Layered Magnetic Structures: Evidence for Antiferromagnetic Coupling of Fe Layers across Cr Interlayers*, Phys. Rev. Lett. 57, 2442 (1986).
- M. Kohler, *Theorie der magnetischen Widerstandseffekte in Metallen*, Annalen der Physik 32, 211 (1938).
- Magnetische Schichtsysteme*, 30. Ferienkurs des Instituts für Festkörperforschung, FZ-Jülich GmbH, Schriften des Forschungszentrums Jülich (1999).
- M. B. Maple, *Novel Types of Superconductivity in f-Electron Systems*, Phys. Today 39(3), 72 (1986).
- T. Miyazaki *et al.*, *Spin polarized tunneling in ferromagnet/insulator/ferromagnet junctions*, J. Magn. Magn. Mat. 151, 403 (1995).
- J. S. Moodera, L. R. Kinder, T. M. Wong, R. Meservey, *Large Magnetoresistance at Room Temperature in Ferromagnetic Thin Film Tunnel Junctions*, Phys. Rev. Lett. 74, 3273 (1995).
- G. E. R. Schulze, *Metallphysik*, Springer-Verlag, Berlin (2012).
- Th. J. Seebeck, *Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz* (1822–23), in Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften Nr. 70, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig (1895).
- F. Steglich, *Schwere-Fermionen-Supraleitung*, Physik Journal, Nr. 8/9 (2004).
- Y. Tokura (Ed.), *Colossal Magnetoresistive Oxides*, Gordon and Breach Science Publishers, London (1999).
- R. von Helmholtz, J. Wecker, B. Holzapfel, L. Schultz, K. Samwer, *Giant negative magnetoresistance in perovskite like  $La_{2/3}Ba_{1/3}MnO_x$  ferromagnetic films*, Phys. Rev. Lett. 71, 2331 (1993).
- M. Ziese, M. J. Thornton eds., *Spin Electronics*, Springer Berlin (2001).
- J. M. Ziman, *Electrons and Phonons*, Clarendon Press (1963).