Klausur Lineare Algebra für Physiker

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	5	5	8	4	6	5	33
Ist-Punkte:							

Begründen Sie Ihre Antworten und Lösungen. Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. In $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sei eine Operation $\circ$ durch

$$x \circ y = x + y + x \cdot y$$

erklärt, wobei $+, \cdot$ die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$ bedeutet. Man zeige, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist.

2. Man löse das folgende Gleichungssystem im Körper der komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + ix_3 &= i \\ -x_1 + 3x_2 + ix_3 &= -2i \\ ix_1 + x_2 + x_3 &= 1 + i. \end{aligned}$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$ und $\det A^{-1}$.

b) Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} von A.

c) Beweisen Sie induktiv mit der Eigenschaft einer Inversen: $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. a) Begründen Sie, dass die Vektoren

$$x_1 = (1, -2, 3, -4)^T, x_2 = (2, -3, 6, -11)^T, x_3 = (-1, 3, -2, 6)^T \in \mathbb{R}^4$$

linear unabhängig sind.

b) Geben Sie einen Vektor $x_4 \in \mathbb{R}^4$ an, so dass $\{x_1, ..., x_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

5. Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^T \to (x + 3y, 2y - x)^T,$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z)^T \to |x| + |y| + |z|.$$

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \bar{z},$$

wobei $\mathbb{C}$ der Vektorraum der komplexen Zahlen über dem Körper $\mathbb{C}$ sei.

a) Untersuchen Sie die Abbildungen auf Linearität.

b) Im Falle der Linearität verifiziere man den Kern-Bild-Satz und untersuche, ob die Abbildung injektiv bzw. surjektiv ist.

6. Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Nullpunkt enthält und $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diejenige lineare Abbildung, die jedem $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ihren Spiegelpunkt $l(x) = Ax$ bezüglich E zuordnet, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ die zugehörige Abbildungsmatrix bezeichnet. Die Einheitsmatrix sei mit E bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $l(l(x))$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und schlußfolgern Sie daraus, dass $A^2 = E$ ist.

b) Wie lautet die Inverse A^{-1} ?

c) Begründen Sie, dass $|\det A| = 1$ ist.

d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A für den Fall, dass E die Ebene $x_1 = x_2$ ist.