Prüfungsklausur Mathematische Physik

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Beweisen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, t^2 dt, \qquad f, g \in C\big([0,1], \mathbb{C}\big),$$

ein Skalarprodukt auf $C\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ definiert ist.

2. Geben Sie den Beweis dafür an, dass auf einem Prä-Hilbertraum $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ für jedes feste $x_0 \in X$ die Abbildung $\langle x_0, \cdot\rangle : X \to \mathbb{K}$ stetig ist.

3. Zeigen Sie, dass

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\right\}$$

ein Orthonormalsystem in $H^1((-\pi,\pi))$ ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\right\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi,\pi))$ ist.

4. Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung

$$u + \partial_x^4 u - \partial_x^2 u = f$$

für jedes gegebene $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine Lösung $u \in H^4(\mathbb{R})$ hat (Lösung nicht explizit ausrechnen!).

5. Zeigen Sie, dass $f = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|\cdot|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ Fundamentallösung von $-\Delta$ in $\mathbb{R}^2$ ist, d.h. dass gilt

$$-\Delta T_f = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Hinweis: Eine Greensche Formel für ein beschränktes Gebiet Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ lautet $\int_\Omega (\Delta u\, v - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\, v - u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma$, wobei n die Außennormale an Ω bedeutet.

6. a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x+1|$. Bestimmen Sie $\partial_x T_f$.
   b) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $\partial_x T_g = \delta_1$.

7. Seien X und Y Hilberträume und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.
   a) Was ist eine Orthonormalbasis von X?
   b) Definieren Sie die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
   c) Was verstehen Sie unter einer Diracfolge auf $\mathbb{R}^d$?
   d) Was ist der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$?
   e) Geben Sie je ein Beispiel für
      - eine reguläre Distribution,
      - eine singuläre Distribution,
      - einen linearen und beschränkten Operator $L : X \to Y$ (mit den zugehörigen Räumen X, Y)

      an.