Prüfungsklausur Mathematische Physik

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Prähilbertraum. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y \qquad (x, y \in X).$$

2. Sei $\Omega = B_1(0)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_1(0), \qquad u = g \quad \text{auf } \partial B_1(0)$$

mit $g(\cos\varphi, \sin\varphi) = 1 + \sin^2\varphi\cos\varphi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$.

- Begründen Sie, dass $u(x,y) \ge 0$ für alle $(x,y) \in B_1(0)$ gilt.
- Berechnen Sie $u(0,0)$.

3. Auf $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}^1$ und für $f \in L_2\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$ betrachten wir das Randwertproblem

$$-u'' + u = f \quad \text{in } (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0. \tag{RWP}$$

a) Geben Sie eine Formulierung dafür an, dass ein $u \in H_0^1\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$ schwache Lösung von (RWP) ist.

b) Begründen Sie mit dem Darstellungssatz von Riesz, dass (RWP) für $f \in L_2\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$ besitzt.

c) Seien jetzt

$$u(x) = f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{für } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

- Begründen Sie, dass $u \in H_0^1(-1,1)$ ist.
- Zeigen Sie, dass u keine schwache Lösung von (RWP) zu dem gegebenen f ist.

4. Berechnen Sie für $u_0 \in L_2\big((0,\pi),\mathbb{R}\big)$ die Lösung $u = u(x,t)$ des Rand-Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 \quad & \text{in } (0,\pi)\times(0,T), && \text{(WLG)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad & \text{für } t \in (0,T), && \text{(RB)} \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad & \text{in } (0,\pi) && \text{(AB)} \end{aligned}$$

in Form einer (reellen) Fourierreihe.

5. Bestimmen Sie mittels Fouriertransformation nach x eine Lösung des Anfangswertproblems für die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + b \cdot \nabla_x u(x,t) = 0, \qquad & x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Dabei seien $b \in \mathbb{R}^d$ ein konstanter Vektor, $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\nabla_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$ der Gradient bezüglich der räumlichen Variablen x.

Bitte wenden

6. Für ein festes $a > 0$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)\, e^{-ax} = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

a) Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? (Begründung!)

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}$.

c) Durch f wird eine reguläre Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ erzeugt. Zeigen Sie, dass sogar $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gilt.

d) Berechnen Sie $\widehat{T_f}$.

e) Zeigen Sie, dass $E = T_f$ Grundlösung des Differentialoperators $L = D^1 + a$ (also $(Lu)(x) := u'(x) + a\,u(x)$) ist, d.h. dass gilt $LE = \delta_0$.

Zusatzaufgabe:

Seien $X = L_2\big((-\pi, \pi), \mathbb{C}\big)$, $S = \{e_{-1}, e_0, e_1\} \subset X$ ein orthonormiertes System in X mit

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-it}, \qquad e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{it}, \qquad (-\pi < t < \pi)$$

und $Y = \operatorname{span} S$ $(= \overline{\operatorname{span} S})$.

Geben Sie das orthogonale Komplement $Y^\perp$ von Y bezüglich des L_2-Skalarproduktes sowie die orthogonale Projektion $P_Y x$ eines Elementes $x \in X$ auf Y an.