Institut für Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Klausur 1 — QUANTENMECHANIK — WS 2016/17

Name, Vorname: Matrikelnr.:

Aufgabe 1 (10P) **Grundlagen** (Bitte auf dem Blatt beantworten und abgeben!)

a) $|\psi_\beta\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat{B}$ mit $\hat{B}|\psi_\beta\rangle = \beta|\psi_\beta\rangle$ und $\beta \in \mathbb{C}$. Geben Sie $\langle\psi_\beta|\hat{B}^\dagger|\psi_\beta\rangle$ an.

b) Der Projektionsoperator auf $|\varphi_n\rangle$ lautet $\hat{P}_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$. Drücken Sie mit $\hat{P}_n$ die Vollständigkeit der Basis $\{|\varphi_n\rangle\}$ aus.

c) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind hermitesche Operatoren. Ist der Operator $[i\hat{A}, \hat{B}]$ auch hermitesch?

d) Die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$. Unter welcher Bedingung haben $\hat{H}$, $\hat{A}$ und $\hat{B}$ simultane Eigenfunktionen?

e) Die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H}$ seien bekannt: $\hat{H}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$. Wie lauten Eigenwerte und Eigenzustände des Operators $\hat{\rho} = e^{\beta\hat{H}}$?

f) Welche Werte können die Quantenzahlen des Gesamtspins zweier Spin-1/2-Teilchen annehmen?

g) Ein Teilchen, das durch den zeitunabhängigen Hamilton-Operator $\hat{H}$ beschrieben wird, befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\psi(0)\rangle$. Geben Sie $|\psi(t)\rangle$ an.

h) Unter welcher Bedingung gilt $\left(\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\right)^* = \langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle$?

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (6P)

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator (Energieeigenwerte und Eigenfunktionen werden als bekannt vorausgesetzt) unterliegt zusätzlich einer Störung der Form $\hat{H}_1 = \lambda\,\hat{x}^2$ (λ=konst.). Geben Sie die Energieeigenwerte in erster Ordnung Störungstheorie an, wenn ω die Kreisfrequenz des ungestörten Oszillators ist. Wie lautet das exakte Ergebnis für den gestörten Oszillator? Hinweis: $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

Aufgabe 3 (6P)

Der Hamilton-Operator für einen axialsymmetrischen Rotator lautet: $\hat{H}_{rot} = \dfrac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2\,I_1} + \dfrac{\hat{L}_z^2}{2\,I_2}$, wobei I_1, I_2 entsprechende Trägheitsmomente und $\hat{L}_j$ ($j = x, y, z$) die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators $\hat{\vec{L}}$ sind.

a) Zeigen Sie , dass $[\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Eigenfunktionen von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ den Erwartungswert von $\hat{H}_{rot}$.

c) Diskutieren Sie das Ergebnisse aus b) für $l = 0$ und 1.

Aufgabe 4 (6P)

Der Zustandsvektor $|j\,m_j\,l\,s\rangle$ ist simultaner Eigenzustand der Operatoren $\hat{\vec{J}}^2$ $\hat{J}_z$, $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{\vec{S}}^2$, wobei der Operator des Gesamtdrehimpulses $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ die Summe aus Bahndrehimpulsoperator und Spinoperator ist.

a) Geben Sie für diesen Zustand die Erwartungswerte für $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ an.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Operator $\hat{H}_{so} = \lambda\,\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$. ($\lambda$: konst.)

c) Welche Werte kann die Quantenzahl j für ein Teilchen mit $l = 2$ und $s = 1/2$ annehmen?

Aufgabe 5 (6P)

Das Elektron im Wasserstoffatom mit $\hat{H} = \dfrac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} - \dfrac{\epsilon^2}{r}$ befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{4}{5}\,|1\,0\,0\rangle + \frac{3}{5}\,|2\,1\,1\rangle,$$

wobei $|n\,l\,m\rangle$ die Eigenzustände des Wasserstoffatoms darstellen.

a) Überprüfen Sie die Normierung des Zustands $|\psi(0)\rangle$.

b) Bestimmen Sie mit $|\psi(0)\rangle$ den Erwartungswert von $\hat{H}$, $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung der Energie der Grundzustand auftritt?

c) Wie ändern sich die Erwartungswerte in b) in Abhängigkeit von der Zeit t?

Zusatzaufgabe (+6P)

Gegeben ist der zeitunabhängige Hamiltonoperator $\hat{H} = \mu_B\,\vec{B} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$ für ein Elektron mit Spin $s = 1/2$ im Magnetfeld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$. Der Operator $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ enthält die Pauli-Spinmatrizen. Zeigen Sie, dass für den zeitabhängigen Operator $\hat{\vec{\sigma}}(t) = \exp(-i/\hbar\,\hat{H}\,t)\,\hat{\vec{\sigma}}\,\exp(i/\hbar\,\hat{H}\,t)$ dann die Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}\,\hat{\vec{\sigma}}(t) = \vec{\omega_B} \times \hat{\vec{\sigma}}(t)$ entsteht. Geben Sie $\vec{\omega_B}$ an.

Aufgabe 1

a) $\hat{P}^+$

b) $1 = \sum_n P_n$ $\quad 1 = \sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$

c) ja

d) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ $\quad$ 2 d) Gdw $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$, $[\hat{H}, \hat{B}] = 0$

e) EW: $e^{\beta E_n}$ EZ: $|\Psi_n\rangle$

f) $S=0$, $S=1$ $\quad \Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$

g) $|\Psi(t)\rangle = e^{-i/\hbar \hat{H} t} |\Psi(0)\rangle$

h) $\hat{A} \cdot \hat{A}^+$

Aufgabe 2

$E_n^{(1)} = \langle n | \hat{H}_1 | n \rangle$

$= \lambda \langle n | \hat{x}^4 | n \rangle$

$= \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1)$

Hinweis:

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$

$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a})$

$\hat{a}\hat{a}^\dagger |n\rangle = (n+1) |n\rangle$

$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle$

Exakt: $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2 \hat{x}^2 + \lambda \hat{x}^4$

$= \left(\frac{m}{2}\omega^2 + \lambda\right) \hat{x}^2 = \frac{m}{2}\omega'^2 \hat{x}^2$

$\Rightarrow E_n = \hbar\omega' \left(n + \frac{1}{2}\right)$ mit $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \frac{2}{m}\lambda}$

$= \omega \sqrt{1 + \frac{2}{m\omega}\lambda}$

Aufgabe 3

$\hat{H}_{rot} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_1} + \frac{\hat{L}_z^2}{I_2}$

a) $\left[\underbrace{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}_{= \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2}, \hat{L}_z\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] - \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z\right] = 0$

b) EWP: $\hat{H}_{rot} |lm\rangle = E_{rot} |lm\rangle$

$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_1}\left[l(l+1) - m^2\right] + \frac{\hbar^2}{2I_2} m^2$

c) $l=0$ $m=0$ $E_{rot} = 0$

$l=1$ $m=0$ $E_{rot} = \frac{\hbar^2}{I_1}$

$m=\pm 1$ $E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_1} + \frac{\hbar^2}{2I_2}$ (zweifach entartet)

Aufgabe 5

Geg $|\psi(t=0)\rangle = \frac{4}{5}|100\rangle + \frac{3}{5}|211\rangle$

$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi(0)|\hat{H}|\psi(0)\rangle$

a) $\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$

b) $\langle \hat{H} \rangle = \frac{16}{25} E_1 + \frac{9}{25} E_2$ $\quad E_n = -\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$\langle \hat{L}^2 \rangle = \frac{9}{25}\hbar^2 2$

$\langle \hat{L}_z \rangle = \frac{9}{25}\hbar$ $\quad W(E_1) = \frac{16}{25}$

$\hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle$

$\hat{L}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$

$\langle r|l,m\rangle = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$

c) Erwartungswerte in b) wachsen mit t

$|\psi(t)\rangle = \frac{4}{5} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|100\rangle + \frac{3}{5} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|211\rangle$

Aufgabe 4

Geg $|j, m_j, l, s\rangle$

a) $\langle \hat{\vec{j}}^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$

$\langle \hat{j}_z \rangle = \hbar m_j$

b) $\langle \hat{H}_{so} \rangle = \frac{A}{2}\hbar^2\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right]$

c) $j = l \pm \frac{1}{2} \Rightarrow j = 1/2$

$j = 3/2$

$\hat{\vec{j}}^2 = (\hat{\vec{l}} + \hat{\vec{s}})^2$

$= \hat{\vec{l}}^2 + \hat{\vec{s}}^2 + 2\,\hat{\vec{l}}\cdot\hat{\vec{s}}$

$\vec{G}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\,\vec{G}\,e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$

$\frac{d}{dt}\vec{G}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\hat{H}\vec{G}\,e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} + e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\,\vec{G}\,\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$

$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\,[\hat{H}, \vec{G}]\,e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$

$H \sim \hat{G}_z$

$[e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \hat{H}] = 0$

$\underline{H = \alpha\hat{G}_z}$ $\quad [\hat{H}, \vec{G}] = \alpha\left[\hat{G}_z, \hat{G}_x\right]\vec{e}_x + \left[\hat{G}_x, \hat{G}_y\right]\vec{e}_y + \left[\hat{G}_x, \hat{G}_z\right]\vec{e}_z$

$(\vec{G} = \hat{G}_x\vec{e}_x)$

$= \alpha 2i\left[\hat{G}_y\vec{e}_x - \hat{G}_x\vec{e}_y\right]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{G}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\alpha\hbar\,2i\left[\hat{G}_y(t)\vec{e}_x - \hat{G}_x(t)\vec{e}_y\right]$

Aufgabe 3

$\hat{H}_{rot} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_1} + \frac{\hat{L}_z^2}{I_2}$

a) $\left[\underbrace{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}_{= \hat{\vec{L}}^2 - \hat{L}_z^2}, \hat{L}_z\right] = \left[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z\right] - \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z\right] = 0$

b) EWP: $\hat{H}_{rot}|l,m\rangle = E_{rot}|l,m\rangle$

$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_1}\left[l(l+1) - m^2\right] + \frac{\hbar^2}{2I_2}m^2$

c) $l=0$ $m=0$ $E_{rot} = 0$

$l=1$ $m=0$ $E_{rot} = \frac{\hbar^2}{I_1}$

$m=\pm 1$ $E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_1} + \frac{\hbar^2}{2I_2}$ (zweifach entartet)

$= \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2$

b) EWP: $\hat{H}_{rot} |l m\rangle = E_{rot} |l m\rangle$

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2I_1}\left[l(l+1) - m^2\right] + \frac{\hbar^2}{2I_2} m^2$$

c) $l=0$ $m=0$ $E_{rot} = 0$

$l=1$ $m=0$ $E_{rot} = \frac{\hbar^2}{I_1}$ [illegible]

Aufgabe 4

Ges: $|j\ m_j\ l\ s\rangle$

a) $\langle \hat{J}^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$

$\langle \hat{J}_z \rangle = \hbar m_j$

b) $\langle \hat{H}_{so} \rangle = \frac{\lambda}{2}\hbar^2 \left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right]$

$\hat{\vec{J}}^2 = (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})^2$

$= \hat{\vec{L}}^2 + \hat{\vec{S}}^2 + 2\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$

c) $j = l \pm \frac{1}{2} \Rightarrow j = 5/2$

$j = 3/2$