INSTITUT FÜR MATHEMATIK

WS 2011/12

Name, Vorname: Diepholz, Johannes
Matrikelnummer: 2111229865
Studienrichtung: Physik

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	6	5	6	6	6	6	35
Ist-Punkte:							

Klausur Lineare Algebra

Vorbemerkung:. Alle Antworten zu den folgenden Aufgaben sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.
Bearbeitungszeit: 120 min

1. Sei M eine nicht leere Menge. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M bezüglich der Operation $+$

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad A, B \in \mathcal{P}(M).$$

eine abelsche Gruppe bildet, d.h. es gilt das Kommutativ- und Assoziativgesetz, es existiert ein Nullelement und zu jedem $A \in M$ ein Inverses $-A$.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei für die Einträge $a_{i,j}$ von A gilt

$$a_{i,j} = i + j - 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad 1 \leq j \leq n.$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A.

b) Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $A^2 x = b$ für $b = (0, 0, 1,)^T$.

4. a) Zeigen Sie: Ist λ ein komplexer Eigenwert der reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit einem zugehörigen Eigenwert $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, dann ist die konjugierte Zahl $\overline{\lambda}$ auch ein Eigenwert von A und $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ und die zugehörigen Eigenvektoren $x \in \mathbb{C}^2$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Seien V, W lineare Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

a) Der Kern $N(L) := \{v \in V : L(v) = 0\}$ von L ist ein Unterraum von V.

b) L ist injektiv genau dann, wenn $N(L) = \{0\}$ gilt.

c) Ist L injektiv und $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ eine Basis von V, dann sind $L(v_1), L(v_2), ..., L(v_n) \in W$ linear unabhängig.

6. Sei V der lineare Vektorraum aller Polynome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \; i = 0, 1, 2, 3$$

mit $(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x)$ und $\alpha \cdot P(x) = \alpha P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass

$$L(P)(x) = P(x) - P'(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

eine lineare Abbildung von V in sich ist. Bestimmen Sie den Kern $N(L)$ und den Wertebereich $R(L)$ von L.