Klausur Mathematik B I (Lineare Algebra)

Name, Vorname: [redacted]
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	5	5	7	5	4	6	32
Ist-Punkte:	[redacted]						

Begründen Sie Ihre Antworten und Lösungen. Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. Beweisen Sie, dass die Menge $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ bezüglich der Operation $\circ$

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

eine abelsche Gruppe ist. [redacted]

2. Sei y ein Vektor des euklidischen Vektorraumes $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Man zeige, dass U ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist und berechne die Dimension von U in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}^n$.

3. Sei $s, t \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & t \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ und $b = (0, 0, s)^T \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem $A_t x = b$ lösbar? Geben Sie in diesen Fällen den Lösungsraum als affinen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ an.

b) Geben Sie den Rang von A_t und der erweiterten Koeffizientenmatrix (A_t, b) in Abhängigkeit von $s, t \in \mathbb{R}$ an.

4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ein Element des $\mathbb{R}$-Vektorrraumes $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to V$ mit $f(X) := AX$ ein Isomorphismus ist. Geben Sie für V, $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ je eine Basis an.

5. Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen $a_{i,n+1-i} = 1$ für $i = 1, 2, ..., n$ und sonst Nullen. Berechnen Sie die Determinante von A.

6. Untersuchen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls eine orthogonale Matrix B, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist.