Mathematikklausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,, \qquad x > -1.$$

2. Ist die Menge

$$M = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

beschränkt? Prüfen Sie, ob M ein Supremum, Infimum, Maximum und Minimum hat und bestimmen Sie diese, falls sie existieren.

3. Es seien a und b reelle Zahlen und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \qquad a_n := \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad (n \geq 2).$$

   a) Ist die Zahlenfolge beschränkt?
   b) Ist die Zahlenfolge monoton?
   c) Untersuchen Sie die Zahlenfolge auf Konvergenz (ggf. Nachweis!)

4. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} n a_n = b$, deren Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $b = 0$ ist.

5. Untersuchen Sie die Reihen

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 2n}{n^6 - 1}\,, \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz.

6. Sei $n \geq 1$ eine feste natürliche Zahl und $f(x) = x^n e^{-x}\,, \quad x \in [1, \infty)$.

   - Zeigen Sie, dass f genau ein relatives Maximum hat und dieses auch ein globales Maximum ist. Bestimmen Sie diese Stelle.
   - Hat f lokale oder globale Minima? Gibt es ein Infimum und welchen Wert hat es?

7. Für welche reellen x ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

definiert? Machen Sie Aussagen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f (Begründung!).

8. Für $n \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}$$

definiert.

   a) Begründen Sie, dass die f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen sind.
   b) Bestimmen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und untersuchen Sie diese auf Stetigkeit.
   c) Konvergiert die Folge f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f ?

9. **Zusatzaufgabe:**

   a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge aus Aufgabe 3.
   b) Berechnen Sie den Wert der Reihe in Aufgabe 5.a)