17.02.2008

Klausur Analysis 1

Alle Antworten zu den folgenden Aufgaben sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu x^{\nu-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

2. Von einer reellen Zahlenfolge (a_n) sei bekannt, dass die Teilfolgen $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ und (a_{3n}) konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch (a_n) selbst konvergiert.

3. Welche der folgenden Reihen konvergiert oder divergiert ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 - 1}{n^5 + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

4. Gegeben sei die Funktion $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

a) Ist f stetig ?

b) Ist f differenzierbar ?

c) Berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x = 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x = 0$ und $g(0) = 0$. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f \cdot g$ im Nullpunkt.

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}.$$

a) Beweisen Sie, dass f auf dem Intervall $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.
(*Tipp* : Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

b) Ist f auch gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

7. Berechnen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) = \frac{1}{x + x^3} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$