WS 2014/2015 17.02.2015

Name, Vorname:
Matrikelnummer
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Z	$\sum$
Soll-Punkte:	4	7	5	8	4	2	+4	30
Ist-Punkte:	3	3	3,5	3	0,5	2	0,5	15,5

bestanden. Pleu.

Klausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : |e^z| = 1\}.$$

2. Seien (a_n) eine konvergente Zahlenfolge mit $a_n \to a_0$ und (b_n) eine beschränkte Zahlenfolge mit (mindestens) einem Häufungspunkt b_0. Beweisen Sie oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:

   (i) $(a_n b_n)$ ist konvergent gegen $a_0 b_0$;
   (ii) $(a_n b_n)$ hat einen Häufungspunkt $a_0 b_0$;
   (iii) $(a_n b_n)$ ist beschränkt.

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{(k+1)^{10}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}.$$

4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}.$$

   a) Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
   b) Untersuchen Sie f für $x \in \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit.
   c) Berechnen Sie $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to \infty} f(x)$.
   d) Betrachtet man f nur auf dem Intervall $[-1, 1]$, dann muss f dort ein Minimum und ein Maximum haben. Begründen Sie das und bestimmen Sie diese.

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$ auf dem gegebenen Intervall eine Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ besitzt, und berechnen Sie die Ableitung dieser Umkehrfunktion an der Stelle $y = e$.

6. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2}.$$

Zusatzaufgabe:

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $e^x - 1 \geq x$ gilt.