WS 2017/2018

07.02.2018

Name, Vorname: [redacted]
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Z	$\sum$
Soll-Punkte:	4	3	4	7	3	6	4	2+4	31
Ist-Punkte:	[redacted]								

Klausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen, wobei Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis verwendet werden dürfen. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad a_1 = 2,$$

streng monoton wachsend ist, und beweisen Sie mittels vollständiger Induktion $\forall n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $a_n > n$.

2. Bestimmen Sie grafisch alle komplexen Zahlen z, welche gleichzeitig die beiden Gleichungen $|z - i| = 1 = |z + 1|$ erfüllen.

3. Weisen Sie die Konvergenz der Zahlenfolge (a_n) nach, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

   (i) $|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$;

   (ii) $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein feste $q \in (0, 1)$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz, und geben Sie bei einer der konvergenten Reihen den Grenzwert an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n-1)!}.$$

5. Für zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x_0) < g(x_0)$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in B(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

6. Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq 0$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^\alpha & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

   a) Untersuchen Sie f in Abhängigkeit von $\alpha \geq 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

   b) Geben Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f einen lokalen Extremwert hat.

   c) Für welche $\alpha \geq 0$ hat f auf $(0, \infty)$ eine Umkehrfunktion? Begründen Sie, warum.

7. Bestimmen Sie zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x) = \arctan x$.

Zusatzaufgabe:

   a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^x$, $x > 0$, sowie den Grenzwert $\lim_{x \to +0} f(x)$.

   b) Sei f differenzierbar in $[a, b]$, und für alle $x \in [a, b]$ gelte $|f(x)| + |f'(x)| \neq 0$ (für $x = a$ bzw. $x = b$ setzen wir $f'(a) := f'_+(a)$, $f'(b) := f'_-(b)$). Beweisen Sie, dass f in $[a, b]$ maximal endlich viele Nullstellen hat.