Fachrichtung Physik 06.02.1999

Mathematikklausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Lösen Sie die Ungleichung $|x+4| < |x| - x$.

2. Bestimmen Sie Grenzwert bzw. Häufungspunkte sowie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ der beiden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{4} \quad , \qquad a_n = \frac{(-3)^n}{n!} \, .$$

3. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1+\nu^2 x}$?
Konvergiert die Reihe dort auch absolut?

4. Sei $a_\nu > 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Man zeige:

- Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergent, dann konvergiert auch $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{1+a_\nu}$.
- Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ divergent, dann divergiert auch $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{1+a_\nu}$.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$.

a) Untersuchen Sie f auf Beschränktheit und berechnen Sie ggf. $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ und $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Besitzt f ein Minimum oder Maximum?

b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

c) Auf welchem Intervall besitzt f eine Umkehrfunktion f^{-1} ? Berechnen Sie diese Umkehrfunktion, und geben Sie dafür den Definitions- und Wertebereich an.

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, daß dann $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \ge 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

6. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie im Fall der Existenz den Wert:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cot 3x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-\sin x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

7. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+5}$ im Punkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe, und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Konvergiert die Taylorreihe auch in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

8. **Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}$.