INSTITUT FÜR MATHEMATIK

SS 2009

Name, Vorname: [redacted]
Matrikelnummer
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	5	5	6	6	6	6	
Ist-Punkte:	[redacted]						

Klausur - Analysis II

bestanden Pler.

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben. Die Zeit ist so bemessen, dass sie für die Bearbeitung von 5 Aufgaben ausreicht.

Bearbeiten Sie mindestens 5 (Lehramt 4) von den 6 folgenden Aufgaben.
Bearbeitungszeit: 90 min

1. Seien B_1 und B_2 zwei abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ mit $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Ist $B_1 \cup B_2$

   a) kompakt *b)* wegzusammenhängend *c)* konvex *d)* sternförmig ?

   Beantworten Sie diese Fragen mit ja oder nein. Begründen Sie Ihre Antwort zu a).

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

   a) Existiert der Gradient von f im Nullpunkt ? Wenn ja, berechnen Sie diesen.

   b) Ist f im Nullpunkt (Fréchet-) differenzierbar ?

3. Ist das Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad , \quad xyz = -1$$

   in einer Umgebung des Punktes $(1, -1, 1)$ nach $y = y(x)$ und $z = z(x)$ auflösbar ? Berechnen Sie gegebenenfalls $y'(1)$ und $z'(1)$.

4. Bestimmen Sie für gegebene $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ das Maximum und Minimum von $f(x) := \sum_{i=1}^n a_i x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ mit Hilfe

   a) der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode
   oder
   b) der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

5. Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(x) = \left(3x_1^2 x_2 \, , \, x_1^3 + x_3 \, , \, x_2 + 1\right)$.

   a) Welchen Wert hat das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(x)\, dx$ längs des geradlinigen Weges γ, der vom Nullpunkt zum Punkt $(1, 1, 1)$ verläuft.

   b) Ist f ein Gradientenfeld ? Berechnen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion zu f.

6. Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_A xy \; d(x, y)$$

   über das ebene Viereck A mit den Ecken $(0, 0), (1, 0), (1, 3), (0, 1)$.