INSTITUT FÜR MATHEMATIK

SS 2012

Name, Vorname: [redacted]
Matrikelnummer: [redacted]
Studienrichtung: [redacted]

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	[redacted]
Soll-Punkte:	4	4	4	5	5	6	
Ist-Punkte:	[redacted]						

Klausur - Analysis II

Bearbeiten Sie die folgenden 6 Aufgaben (Lehramt nur die Aufgaben 1-5). Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.
Bearbeitungszeit: **120 min**

1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind? Begründen Sie **genau drei** der folgenden Aussagen oder widerlegen Sie diese durch Angabe eines Gegenbeispieles:
   a) Das Bild jeder offenen Menge einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist offen.
   b) Sei (x_n) eine konvergente Folge eines normierten Vektorraumes. Dann gilt
   $$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = || \lim_{n\to\infty} x_n||.$$
   c) Die Einheitskugel $B = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ ist eine wegzusammenhängende Menge.
   d) Wenn für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alle partielle Ableitungen erster Ordnung im Nullpunkt existieren, dann ist f im Nullpunkt stetig.
   e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung $Df(x) = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f eine Konstante.
2. Berechnen Sie das uneigentliche Integral
   $$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1}.$$
3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.
   b) Begründen Sie, dass f im Nullpunkt vollständig differenzierbar ist.
4. Ist das Gleichungssystem
   $$\begin{aligned} \sin z + y^2 + x &= 0 \\ e^z + y + x &= 1 \end{aligned}$$
   in einer Umgebung des Punktes $(0,0,0)$ eindeutig nach y, z auflösbar ? Berechnen Sie die Ableitungen $y'(0)$ und $z'(0)$, falls diese existieren.
5. a) Begründen Sie, dass die Funktion
   $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
   auf der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ ihr Maximum und Minimum annimmt.
   b) Berechnen Sie dieses Maximum und Minimum.
6. a) Ist das Vektorfeld
   $$f(x) := \left(x_1 + x_3\,,\, -x_2 - x_3\,,\, x_1 - x_2 + 1\right), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$
   ein Gradientenfeld ? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.
   b) Berechnen Sie $\int_C f(x)\,dx$ längs der Kurve
   $$C : \; x_1(t) = \cos^2 t,\; x_2(t) = \sin^2 t,\; x_3(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq \pi).$$
   c) Welche Länge hat C ?

(Tip zu 6. b) und c): Geometrische Anschauung der Kurve erspart Ihnen die Berechnung !)