SS 2013

05.07.2013

Name, Vorname: [redacted]
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Soll-Punkte:	6	4	4	4	5	7	6	36/30
Ist-Punkte:	[redacted]							[redacted]

[redacted]

Klausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale $\int \frac{\log x}{x^3}\,dx$ und $\int \frac{\log x}{x}\,dx$.
   Existieren die Integrale
   $$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx\,?$$

2. Ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \geq 1\} \cap \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2\}$
   a) abgeschlossen, b) offen, c) beschränkt,
   d) kompakt, e) konvex, f) sternförmig,
   g) zusammenhängend, h) einfach zusammenhängend?
   Beantworten Sie die Fragen nur mit ja oder nein.

3. Untersuchen Sie die Funktion
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{für } x \neq y, \\ 1 & \text{für } x = y \end{cases}$$
   im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ auf
   a) Stetigkeit,
   b) Existenz der partiellen Ableitungen $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$,
   c) Differenzierbarkeit.

4. Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\Phi(x) = (Ax|x)$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Berechnen Sie die Ableitung von $f = v \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem
   $$x + y - \sin z = 0$$
   $$e^z - x - y^3 = 1$$
   in einer Umgebung von $(0,0,0)$ eine eindeutige Auflösung $(y,z)^T = g(x)$ besitzt, und berechnen Sie $g'(0)$.

6. Sei $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$.
   a) Hat f auf $\mathbb{R}^2$ eine größten und kleinsten Funktionswert? Wenn ja, bestimmen Sie diese.
   b) Auf der Kreislinie $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ nimmt die Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum an. Begründen Sie, warum, und berechnen Sie den größten und kleinsten Funktionswert von f auf K.

Fortsetzung auf der Rückseite

Die folgende Aufgabe 7 ist von LAG nicht zu bearbeiten.

7. Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ die Schraubenlinie $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{10})^T$, $0 \leq t \leq t_0$.

a) Berechnen Sie die Länge von γ.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Schraubenlinie.

Entlang der Schraubenlinie γ wird ein Massepunkt vom Punkt $A = (1, 0, 0)$ zum Punkt $B = (1, 0, \frac{\pi}{5})$ durch ein Kraftfeld $f(x) = (2x_1 + x_3, 2x_2, x_1)^T$ bewegt und dabei die Arbeit $W = \int_\gamma (f|d\gamma$ verrichtet.

c) Ist die Arbeit vom Weg unabhängig?

d) Falls f ein Potential besitzt, bestimmen Sie dieses.

e) Berechnen Sie W.

$W = F(B) - F(A)$