Name, Vorname:	Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Matrikelnummer:	Soll-Punkte:	3	6	6	6	7	5
Studienrichtung:	Ist-Punkte:						

Klausur - Analysis II

Vorbemerkung: Bearbeiten Sie die folgenden 6 Aufgaben (Lehramt nur die Aufgaben 1-5). Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Untersuchen Sie auf Konvergenz
$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$$

2. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie nur die Aussagen a), c) und f).

   a) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen nicht leeren Mengen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge.

   b) Jede abgeschlossene und beschränkte Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

   c) Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots x_n^2 < 1\}$. Jede stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ besitzt ein globales Minimum.

   d) Sei $O \in \mathbb{R}^n$ eine nicht leere offene Menge. Ist $f : O \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $grad\, f(x) = 0$ für alle $x \in O$, dann ist f konstant in O.

   e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist die Hessematrix H_f symmetrisch.

   f) Sei $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Polynom. Dann konvergiert die Taylorreihe $T(h)$ von P mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und es gilt $T(h) = P(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt stetig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt nicht vollständig differenzierbar ist.

   (c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Nullpunkt für die Richtung
$$\mathbf{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \text{ fest.}$$

4. Gegeben ist das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + 2y^2 + 3z^3 &= 0 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} &= 3. \end{aligned}$$

   a) Geben Sie eine Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems an. Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0) nach x, y als Funktion von z auflösen lässt.

   b) Es seien $x = x(z)$ und $y = y(z)$ die Lösungen von a). Berechnen Sie $x'(z_0)$ und $y'(z_0)$.

5. Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y,z) = 3x^2 - 4y + 2z$$
unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ein Maximum und Minimum besitzt. Berechnen Sie diese Extrema mittels Lagrangescher Multiplikatorenregel.

6. Sei $R > 0$ und $K_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2,\ x, y \geq 0\}$. Begründen Sie die Ungleichungen
$$\int\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \int\int_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \int\int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$
Wenden Sie auf das mittlere Integral den Satz von Fubini an und berechnen Sie die äußeren Integrale mittels Transformation in Polarkoordinaten. Schlußfolgern Sie daraus
$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$