Fachrichtung Physik, Med. Physik 19.07.2002

Mathematikklausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie, sofern sie existieren, die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

2. Auf $B = [0,1] \times [0,1]$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 2y & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

   Untersuchen Sie, in welchen Punkten $(x,y) \in B$ die Funktion f stetig bzw. unstetig ist und führen Sie den Nachweis.

3. Sei $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

   a) Existieren die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkt $(0,0)$? Wenn ja, berechnen Sie diese!

   b) Ist f in $(0,0)$ vollständig differenzierbar?

   c) Berechnen Sie den Anstieg von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung $\vec{l} = (1,1)$.

4. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion $u(x,y,z) = x - 2y + 2z$ auf der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

5. Unter Wirkung des Kraftfeldes

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

   bewege sich ein Massepunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

6. Welche Länge hat das Kurvenstück aus Aufgabe 5 ?

7. Eine Messingschale der Höhe 1 wird durch die Gleichung $4z = x^2 + y^2$ beschrieben.

   a) Welches Volumen fasst die Schale, wenn sie bis zum Rand mit Wasser gefüllt wird?

   b) Bis zu welcher Höhe muss man Wasser einfüllen, damit die Schale genau halb voll ist?

   c) Welche Masse hat die Schale, wenn man dafür eine konstante Flächendichte von $\rho = 90$ ($[\mathrm{g/dm^2}]$, Längeneinheiten jeweils in dm) annimmt?

8. **Zusatzaufgabe:**

   Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ und $\partial U_\varepsilon(x_0)$ der Rand von $U_\varepsilon(x_0)$. Zeigen Sie

$$\operatorname{div} f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \iint_{\partial U_\varepsilon(x_0)} f \cdot \nu \, do$$