Mathematikklausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie mit geeigneten Integrationsmethoden die folgenden Integrale

$$\text{a)} \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_{0}^{1} x^2 \ln x\,dx\,, \qquad \text{c)} \int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

2. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt unstetig ist.

   b) Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

   c) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial l}(0,0)$ in Richtung $l = (1,1)$.

3. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(\varphi,\theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta),$$

   sowie die partielle Ableitung der Zusammensetzung $g(f(\varphi,\theta))$ nach φ, wobei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

4. Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$

   a) im $\mathbb{R}^2$, b) auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

5. Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ heißt *logarithmische Spirale*.

   - Skizzieren Sie die Kurve im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.
   - Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve für $a \leq t \leq b$.
   - Hat die logarithmische Spirale für $-\infty < t \leq 0$ eine endliche Länge?

6. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

   wobei γ die geschlossene Kreislinie ist, die durch einen Schnitt der Einheitskugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ mit der Ebene $x = y$ entsteht.