Prof. Dr. H. Renelt

Analysis II
Übungen SS 2005
Klausur am 14. 7. 2005

1. Berechnen Sie die Riemann-Stieltjes-Integrale

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^2 \, dx^2$, b) $\int_1^2 x^{\frac{2}{3}} d \ln x$.

2. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz.

   a) $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$, b) $\int_1^\infty \frac{\sin e^x}{x^2} dx$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer (möglichst einfachen) konvergenten Majorante, daß die Funktionenreihe

   $$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j-1}}{(2j)!} \quad \left(= \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{für} & x = 0 \end{cases} \right)$$

   im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert.

4. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = x^y$ im Punkt $(2, 2)$ zur Richtung $\mathfrak{e} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. Berechnen Sie das Kurvenintegral

   $$\int_\gamma (y + x) dx + dy + z dz, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] .$$

6. Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld

   $$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

   ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie, wenn ja, eine zugehörige Stammfunktion.

7. a) Geben Sie ein Integrabilitätskriterium an, aus dem die Existenz des Integrals $\int_A \sin(xy) \, dxdy$ mit $A = [0, 1] \times [0, 1]$ folgt.

   b) Berechnen Sie das Integral $H(x) := \int_0^1 \sin(xy) \, dy$ für jedes $x \in [0, 1]$.

   c) Berechnen Sie das in a) genannte Integral (mit Hilfe einer Reihe, sofern dies zulässig ist).
   Hinweis zu c): Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 3) (auch wenn Sie die Aufgabe 3) nicht gelöst haben).