20. Juli 2006

Klausur Analysis 2

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \;=\; 0.$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx).$$

a) Begründen Sie, dass diese Funktionenreihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Wenn ja, wie lautet die Reihendarstellung von $f'(x)$.

c) Besitzt f eine Stammfunktion F? Wenn ja, wie lautet die Reihendarstellung von F mit $F(0) = 1$?

3. Seien M_1 und M_2 kompakte Mengen des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Menge

$$M = \{x + y \in \mathbb{R}^n \;:\; x \in M_1,\; y \in M_2\}$$

eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ ist.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = |xy|$.

(a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(b) Berechnen Sie grad f in den Punkten $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ und $P_2 = (1, 1)$, sofern er existiert.

(c) Untersuchen Sie f im Punkt $P_0 = (0, 0)$ auf (totale) Differenzierbarkeit.

5. Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

die Polarkoordinaten.
Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi)$ auf der Einheitskreislinie $r = 1$.

6. Bestimmen Sie den kleinsten und größten Wert der Funktion $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ auf dem Ellipsoiden

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}.$$