Klausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

4 Pkte. 1. Existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx\ ?$$

5 Pkte. 2. Ist die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_3 \le x_1^2 + x_2^2\}$

ja	nein	
☐	☒	offen,
☒	☐	abgeschlossen,
☐	☒	beschränkt,
☐	☒	kompakt,
☒	☐	zusammenhängend,
☒	☐	sternförmig,
☒	☐	einfach zusammenhängend?

3/5

Beweisen Sie ihre Aussage zur Abgeschlossenheit.

6 Pkte. 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

a) Berechnen Sie, sofern sie existieren, die partiellen Ableitungen nach x und y sowie die Richtungsableitung in Richtung $\vec{l} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ jeweils im Punkt $(0,0)$.

b) Untersuchen Sie, ob f im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

4 Pkte. 4. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion $f(x,y) = x^4 - 3xy^3$ im Punkt $(1,1)$.

5 Pkte. 5. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,-1,1)$ eine eindeutige stetig differenzierbare Auflösung $z = g(x,y)$ hat. Hat die Funktion g im Punkt $(0,-1)$ ein lokales Minimum bzw. Maximum?

8 Pkte. 6. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f(x,y) = x^3+3xy+y^3$ und untersuchen Sie mit der hinreichenden Bedingung, ob dies Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) auf dem $\mathbb{R}^2$,

b) auf der Geraden $y = x$ (Lagrange-Methode verwenden!).

4 Pkte. 7. Sei $\gamma_a = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $0 \le t \le a$.

a) Skizzieren Sie die Kurve γ_a für $a = 6\pi$.

b) Berechnen Sie die Kurvenlänge $L(\gamma_a)$.

c) Existiert $\lim_{a\to\infty} L(\gamma_a)$?

8 Pkte. 8. In einem ebenen elektrischen Feld sei die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ gegeben durch

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(d.h. $\vec{E}$ ist die Kraft, die auf eine Einheitsladung im Punkt (x,y) wirkt).