Klausur Analysis 2

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Soll-Punkte:	6	6	6	6	6	6	4	30/40
Ist-Punkte:								

Bearbeiten Sie die folgenden 7 Aufgaben. Die Aufgaben 1 bis 5 sind obligatorisch für Lehramtsstudenten.
Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Beweisen oder widerlegen Sie zwei der Aussagen.
   Der $\mathbb{R}^n$ sei versehen mit einer Norm.
   a) die Menge $B \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn ihr Rand ∂B kompakt ist.
   b) Jede Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.
   c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1 e^{x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}$ besitzt keine lokalen Extrema.
   d) Ist $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $f : O \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit verschwindender Ableitung, dann ist f eine Konstante.

2. Untersuchen sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
   auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Nullpunkt in Richtung des Vektors $\nu = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ für $0 \leq \varphi < 2\pi$ falls diese existiert.

3. Begründen Sie, dass sich das Gleichungssystem
$$x + 2y^2 + 3z^3 = 0, \qquad e^x + e^{2y} + e^{3z} = 3.$$
   lokal in einer Umgebung des Nullpunktes nach x und y als Funktion von z auflösen lässt. Berechnen Sie die Ableitungen $x'(0)$ und $y'(0)$.

4. Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$
   mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode. Begründen Sie zunächst die Existenz der Extrema.

5. Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sin(x-y)$ das Taylorpolynom T_1 ersten Grades im Nullpunkt und beweisen Sie folgende Ungleichung durch Abschätzung des Restgliedes R_1 in der Taylorformel
$$|f(x,y) - T_1(x,y)| \leq \frac{1}{2}(|x| + |y|)^2 \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Sei Γ die Kurve in der $x = (x_1, x_2)$-Ebene mit der Parameterdarstellung
$$\gamma(t) = \Big(t\,,\ \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\Big), \quad 0 \leq t \leq 1.$$
   a) Berechnen Sie die Länge der Kurve Γ.
   b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma x dx$. Ist $f(x) = x$ ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^2$?

7. Gegeben sei der Kreisring $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Berechnen Sie
$$\int_B e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$