Klausur Analysis 2

Name, Vorname:	Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Matrikelnummer:	Soll-Punkte:	5	5	5	5	5	5	30
Studienrichtung:	Ist-Punkte:							

Bearbeiten Sie die folgenden 6 Aufgaben. Bearbeitungszeit: **120** Minuten. Die Klausur ist bestanden, wenn Sie mindestens 15 Punkte (12 Punkte für Lehramt Gymnasium) erwerben.

1. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Begründen Sie mindestens zwei Ihrer Antworten. Für weitere Begründungen können Sie insgesamt zwei Bonuspunkte erhalten.

   a) Jede abzählbar unendliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

   b) Seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$, dann ist (X, d) bezüglich der diskreten Metrik d nicht zusammenhängend.

   c) Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots x_n^2 < 1\}$. Jede Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ besitzt ein Minimum.

   d) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist die Hessematrix H_f symmetrisch.

   e) Ist der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 Null, dann hat f in x_0 ein lokales Extremum.

   f) Jede konvergente Folge im metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.

2. Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx.$$

3. Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to R$ mit

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   a) Berechnen Sie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

   b) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$ und $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

   c) Begründen Sie, dass f_n nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & : \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Begründen Sie:

   a) f ist stetig.

   b) Es existiert die Richtungsableitung von f im Nullpunkt für alle Richtungen $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   c) f ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

5. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + \cos(x^2 - y).$$

6. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f = \begin{pmatrix} x^2 + u + \sin v \\ x + u^2 - u\cos v \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

   b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $f = \binom{0}{0}$ in einer Umgebung des Nullpunktes nach stetig differenzierbaren Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ mit $u(0) = v(0) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie $u'(0)$ und $v'(0)$.