Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Soll-Punkte: | 8 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 27/33 |
| Ist-Punkte: | | | | | | | |

Bearbeiten Sie die Aufgaben 1 bis 5. Die Aufgabe 6 ist zusätzlich nur von den Mathematikern, Wirtschaftsmathematikern, Physikern und Medizin-Physikern zu lösen. Begründen Sie Ihre Antworten und Lösungen.

Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Beweisen Sie die Aussagen, falls sie wahr sind bzw. widerlegen Sie diese anhand eines Beispiels, falls sie falsch sind.

   a) Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x e^{-nx}$ ist stetig.

   b) Der Raum $X$ mit diskreter Metrik ist vollständig.

   c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Existiert der Gradient von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Nullpunkt, dann ist $f$ dort stetig.

   d) Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jeder kompakten und konvexen Menge $K \subset G$ ein $L > 0$, so dass gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in K.$$

2. Zeigen Sie die Existenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

3. Gegeben seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = |xyz|^{\alpha}.$$

   Untersuchen Sie, ob $f$ im Nullpunkt

   *a)* stetig *b)* partiell differenzierbar und *c)* Frechet-differenzierbar ist.

4. Man untersuche, ob durch die Gleichungen

$$x^2 + y - \sin z = 0, \quad e^x - y - e^{xz} = 0$$

   in einer Umgebung von $z = 0$ zwei Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ mit $x(0) = y(0) = 0$ definiert werden und berechne $x'(0)$ und $y'(0)$ falls existent.

5. Berechnen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = (x + y - z)^2$ auf der Kugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

6. Gegeben sei das Vektorfeld $f(x) = (x_1 + x_2\,,\, x_1 + 2x_2)$ auf der Kurve $\Gamma$ mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = (\sqrt{3}(t^2 - 1), t^3 - t)$, $t \in [-2, 2]$.

   a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\Gamma$.

   b) In welchem Punkt überschneidet sich die Kurve $\Gamma$ ?

   c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x) dx$.