SS 2006 03.11.2006

Wiederholungsklausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Für welche reellen α konvergiert bzw. divergiert das Integral

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx\ ?$$

2. Geben Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

in Form einer Reihe an, indem Sie den Integranden durch eine Reihe ersetzen und gliedweise integrieren. Zeigen Sie, dass die gliedweise Integration zulässig ist.

3. Seien M_1 eine offene Menge und M_2 eine beliebige Menge des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Menge

$$M = \{x + y \in \mathbb{R}^n \ : \ x \in M_1, y \in M_2\}$$

offen ist.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(xy^2) & \text{für } x \neq 0 \\ y^2 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

a) In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ ist f stetig? (Begründung!)

b) Berechnen Sie grad f im Punkt $P_0 = (0,0)$.

c) Zeigen Sie, dass f im Punkt $P_0 = (0,0)$ (total) differenzierbar ist.

5. Ist das System

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ xyz &= -1 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 = (1,-1,1)$ eindeutig nach y und z auflösbar? Wenn ja, berechnen Sie $y'(1)$ und $z'(1)$.

6. Gesucht ist der (kleinste) Abstand der Parabel $y = x^2$ zum Punkt $P_0 = (3,0)$.

(i) Formulieren Sie das Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen.

(ii) Bestimmen Sie mit der Lagrange-Methode den Punkt (x,y) auf der Parabel, in dem der Abstand zu P_0 am kleinsten wird.

(iii) Berechnen Sie den Abstand von P_0 zur Parabel.