Wiederholungsklausur Analysis 2

1. a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int e^{-x} \cos x \, dx \, .$$

b) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx \, ?$$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

a) Existieren die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Nullpunkt ? Wenn ja, berechnen Sie diese.

b) Ist f im Nullpunkt vollständig differenzierbar ? Wie lautet die Ableitung von f im Nullpunkt ?

3. Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

$$x + y - \sin z = 0 \, , \qquad e^z - x - y^3 = 1$$

in einer Umgebung von $x = 0$ zwei Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) = z(0) = 0$ definiert werden und ob sie, wenn dies der Fall ist, bei $x = 0$ lokale Extrema besitzen.

4. Begründen Sie, dass die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ auf der Kugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ihre globalen Extrema annimmt, und berechnen Sie diese.

5. Gegeben sei das Vektorfeld f durch

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \, , \, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) , \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) Ist f ein Gradientenfeld ? Berechnen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion zu f.

b) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_C f(x) \, dx$ längs des Einheitskreises $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

6. Gegeben sei der Körper $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq xy\}$.

a) Skizzieren Sie den Körper K.

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

$x = \sqrt{1 - y^2}$

$z \leq y \cdot \sqrt{1 - y^2}$

$\sqrt{y^2 \cdot (1 - y^2}$

$z \leq \sqrt{y^2 - y^3}$