Mathematikklausur Analysis III

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Welchen Inhalt hat die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius $R = 1$ und der Höhe $H = 2$? 4

2. Der Zylinder $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$ hat das Volumen 4π. 6
   Berechnen Sie den Fluss
   $$\int_{D^{\pm}} (\vec{f} \cdot \nu)\, d\sigma$$
   des Vektorfeldes $\vec{f} = (x, y, z)^T$ durch die Grund- und Deckfläche $D^{\pm}$ des Zylinders und bestimmen Sie daraus mit dem Gaußschen Integralsatz den Fluß durch die Mantelfläche.

3. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ auf Konvergenz. 3

4. In welchen Punkten sind die Funktionen $f_1(z) = z\bar{z}$ und $f_2(z) = \frac{1}{z}e^z$ stetig, differenzierbar, holomorph? 5

5. Berechnen Sie für komplexe $z = x + iy$ die Werte $|a^z|$, $a \in \mathbb{R}$ konstant, und $|i^z|$. 4

6. Bestimmen Sie den Wert des Integrals
   $$\int_{\Gamma} \int_1^i \frac{1}{z}\, dz\,,$$ 3
   wobei Γ der Bogen des Einheitskreises von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$ sei.

7. Entwickeln Sie die Funktion
   $$f(z) = \frac{z^2 - 2}{z(z+i)^2}$$ 6
   in einer Umgebung von $z_0 = -i$ in eine Laurentreihe. Um was für eine Singularität handelt es sich bei z_0? Geben Sie das Residuum von f in z_0 und das Konvergenzgebiet der Laurentreihe an.

8. Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale 5
   $$\text{a)} \int_{|z|=3/2} \frac{\tan z}{z - i}\, dz \qquad \text{b)} \int_{|z|=1} z e^{1/z^2}\, dz \qquad \text{c)} \int_{|z|=1} J_5(z)\, dz$$
   ($J_k(z)$ - Besselfunktion).

9. Welchen Wert hat $\mathrm{Res}_{z_0} f'(z)$, wenn $f(z)$ in $z = z_0$ einen Pol n-ter Ordnung besitzt? 4

10. **Zusatzaufgabe:** Berechnen Sie 3
    $$\int_{|z|=1/2} \Gamma(z)\, dz.$$

40