Fachrichtung Physik, 4. Sem. 21.07.2000

Mathematikklausur Analysis IV

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie mittels Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y = t\,, \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{matrix}$$

2. Bestimmen Sie in der Halbebene $y > 0$ den Typ der Differentialgleichung

$$u_{xx} - y u_{yy} = 0,$$

und transformieren Sie diese auf Normalform.

3. Berechnen Sie mit einem Separationsansatz beschränkte, nichtkonstante Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in der Halbebene $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$.

4. Geben Sie eine Randbedingung an, für die die Gleichung $\Delta u = 0$ in einem Gebiet Ω keine Lösung besitzt.

5. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r} + v(P, P_0)$, $(r = \|P - P_0\|)$, die Greensche Funktion zum 1. Randwertproblem für $\Delta u = 0$ in Ω. Zeigen Sie die Eigenschaft

$$0 < G(P, P_0) < \frac{1}{4\pi r}\,, \qquad \forall P, P_0 \in \Omega, P \neq P_0.$$

6. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{1}, 0, 0, \ldots)$ eine Menge von Elementen aus dem l_2.

Bilden diese

a) eine beschränkte Folge

b) eine Cauchyfolge

c) eine konvergente Folge

d) ein orthonormiertes System

e) ein vollständiges orthonormiertes System

in l_2 ? (Begründung!) (Hinweis: $\|x\|_{l_2} = (\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2)^{1/2}$ für $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$.)

Zusatzaufgabe:

7. Untersuchen Sie Linearität und Beschränktheit des Operators $A : C[0,1] \to C[0,1]$ mit

$$Ax(t) = \int_0^1 \sin(t + \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$