Mathematikklausur Analysis IV

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$$

Geben Sie die charakteristische Gleichung und die Koordinatentransformation für die Transformation auf Normalform an (Transformation nicht ausführen).

2. Gegeben sei das Dirichletproblem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wie lautet die Greensche Funktion, wenn $\Omega = \{(x, y, z) : z > 0\}$ der obere Halbraum des $\mathbb{R}^3$ ist?

3. Lösen Sie (formal) mit Fourierscher Methode das Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0\,, & t > 0, \\ u(x,0) &= 1\,, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

4. Skizzieren Sie die Lösung des Anfangswertproblems für die Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0\,, & u(x,0) &= g(x) \\ & & u_t(x,0) &= h(x) \end{aligned}$$

($-\infty < x < \infty$, also unendlich lange Saite) für $t = 0$, $t = \pi/2$ und $t = \pi$, wenn folgende Anfangsfunktionen gegeben sind:

a) $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\quad h(x) \equiv 0$

b) $g(x) \equiv 0$, $\quad h(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x+s}\, \varphi(s)\, ds = f(x). \qquad (*)$$

Gibt es Funktionen f, so dass die inhomogene Gleichung $(*)$ für jedes reelle λ mindestens eine Lösung besitzt?

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ im Intervall $[1, \infty)$ Lebesgue-integrierbar ist.

Zusatzaufgabe:

7. Geben Sie eine Lösungsformel für das Problem aus Aufgabe 2 an.