SS 2008 24.7.2008

Prüfungsklausur Mathematische Physik

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie mittels Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y = t\,, \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{matrix}$$

2. Welchen Typ hat die Differentialgleichung

$$u_{xx} - x^2\, u_{yy} - \tfrac{1}{x}\, u_x = 0$$

im Gebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$? Bestimmen Sie dort über Transformation auf Normalform die allgemeine Lösung.

3. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $g : \partial G \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Randwertprobleme für die Differentialgleichung $\Delta u = f$ in G höchstens eine Lösung besitzen können (hierbei sei n die äußere Normale an G):

$$\text{a)} \quad u|_{\partial G} = g\,, \qquad \text{b)} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\Big|_{\partial G} = g\,, \quad \alpha > 0.$$

(Tipp zu b): Greensche Formel $\int_G (\Delta u\, v + \nabla u \nabla v) dx = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma$ benutzen.)

4. Lösen Sie mit einem Separationsansatz das zweite Randwertproblem für die WLG

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0, \\ u(x,0) &= \cos^2 x\,, && 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x+s}\, \varphi(s)\, ds = f(x). \qquad (*)$$

Gibt es Funktionen f, so dass die inhomogene Gleichung $(*)$ für jedes reelle λ mindestens eine Lösung besitzt?

Von den folgenden beiden Wahlpflichtaufgaben ist nur eine zu bearbeiten.

W1. Zeigen Sie mittels Fouriertransformation, dass die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-y)^2}\, \varphi(y)\, dy = 0$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur die triviale Lösung besitzt.

W2. Sei $f \in L(\mathbb{R})$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion. Zeigen Sie durch Anwendung eines geeigneten Konvergenzsatzes die Eigenschaft

$$\lim_{R \to \infty} \int_R^{\infty} f(x)\, dx = 0.$$

Anhang: Nützliche Formeln

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, e^{-|\xi|}\,, \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x\,.$$