Prüfungsklausur Mathematische Physik

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Auf welche Kurven in der w-Ebene wird die Gerade $g = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$ durch die Funktionen $w = e^z$ und $w = \frac{1}{z}$ abgebildet?

2. a) Berechnen Sie mittels Laplace-Transformation die Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(t) - \int_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds = t, \qquad t > 0.$$

   b) Gilt $\varphi(x) = xe^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$? Berechnen Sie unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung die Fouriertransformierte $\hat{\varphi}$ von φ.

3. Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen der (zugehörigen homogenen) Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 s\varphi(s)\,ds = f(x)$$

   sowie der dazu adjungierten Integralgleichung. Geben Sie eine Bedingung an f an, unter der die inhomogene Integralgleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung besitzt.

4. Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0$$

   und geben Sie eine Variablentransformation an, die diese auf Normalform überführt.

5. Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$. λ heißt Eigenwert des Dirichletproblems für den Laplace-Operator Δ, wenn

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

   nichttriviale Lösungen hat.

   a) Bestimmen Sie mit einem Separationsansatz Eigenwerte und Eigenfunktionen des obigen Problems.

   b) Geben Sie mit Hilfe von a) nichttriviale Lösungen $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\Omega \times [0,T]$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T]$ an.

6. Wir betrachten das Doppelschichtpotential

$$W_\nu(x) = \int_{\partial\Omega} \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\sigma_y$$

   für ein beschränktes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ mit einer konstanten Belegung $\nu(y) \equiv \nu_0$.

   a) Zeigen Sie, dass $W_\nu(x) = 0$ für $x \notin \overline{\Omega}$ ist (Tipp: Greensche Formel).

   b) Bestimmen Sie $W_\nu^i(x) := \lim\limits_{\xi \to x,\ \xi \in \Omega} W_\nu(\xi)$ für $x \in \partial\Omega$ mit Hilfe der Sprungbedingung.

   c) Begründen Sie unter Verwendung von b), dass $W_\nu(x) = -4\pi\nu_0$ für alle $x \in \Omega$ ist.

Von den folgenden beiden Wahlpflichtaufgaben ist nur eine zu bearbeiten.

W1. Eine Funktion $f \in L_2(0,\pi)$ habe die Fourierreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx$. Berechnen Sie (formal) die Lösung des Randwertproblems

$$u''(x) + u(x) = f(x) \qquad \text{für } 0 < x < \pi,$$
$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

in Form einer Fourierreihe und zeigen Sie, dass sowohl diese Reihe für u als auch die einmal gliedweise differenzierte Reihe gleichmäßig konvergieren. Welche Eigenschaft von u kann man daraus ableiten?

W2. Ein Integraloperator $K\varphi(x) := \int_0^1 k(x,s)\varphi(s)\,ds$ mit stetigem symmetrischen Kern $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ habe mindestens zwei verschiedene Eigenwerte λ_1 und λ_2. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenfunktionen φ_1 und φ_2 orthogonal bezüglich des Skalarproduktes $(u,v) = \int_0^1 u(s)v(s)ds$ sind.