Klausur Computational Physics WS 2008/2009

12. Februar 2009, Dozenten: W. Hergert und J.W. Kantelhardt

Zugelassenes Hilfsmittel: selbstgeschriebene Formelsammlung.

- **Aufgabe 1 (Zufallszahlen, 6 Punkte):**
  Gegeben sind Zufallszahlen z, die ganze, positive Zahlen zwischen 0 und $MAXINT = 2^{31} - 1$ sind und einer Gleichverteilung folgen. Leiten Sie Formeln her, mit denen man aus den Zahlen z transformierte Zufallszahlen x mit der angegebenen Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte) erhält! Beachten Sie, dass die Verteilungen noch normiert werden müssen.

  a) Würfel: $p(x) \sim \delta(x-1) + \delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta(x-4) + \delta(x-5) + \delta(x-6)$

  b) $p(x) \sim \sin(x)$ mit $x \in [0, \pi)$

  Hinweis: Ihre Formel soll direkt (ohne if-Abfragen) x aus z berechnen.

- **Aufgabe 2 (Random Walk, 6 Punkte):**
  Betrachtet wird ein Random Walker (Irrläufer) auf einem Quadratgitter (2d). Bei jedem Schritt springt der Irrläufer exakt $l = 5$ Gitterkonstanten weit in eine beliebige Richtung, aber so, dass er dabei wieder genau auf einem Platz des Gitters landet. Alle erlaubten Sprünge seien gleich wahrscheinlich; der Startpunkt sei $(0, 0)$.

  a) Wieviele verschiedene Zielplätze gibt es bei jedem Sprung? Hinweis: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

  b) Geben Sie die mittlere Position $(\langle x(t)\rangle, \langle y(t)\rangle)$ des Irrläufers nach $t = 10$ Sprüngen an (mit Begründung)!

  c) Berechnen Sie den mittleren Abstand $R(t) = \sqrt{\langle x^2(t) + y^2(t)\rangle}$ ebenfalls nach $t = 10$ Sprüngen!

  d) Welchen Wert hat die Diffusionskonstante D, wenn man diesen Irrläufer als diffundierendes Teilchen betrachtet?

  e) Beschreiben Sie die Auswirkungen auf $R(t)$ und D für den Fall, dass sich der Irrläufer nur auf den besetzten Plätzen eines unendlichen Perkolationsclusters bei $p = p_c$ bewegt, d.h. alle Sprünge auf nicht zum Cluster gehörende Plätze verboten sind!

- **Aufgabe 3 (6 Punkte):**

  a) **(Deterministisches Chaos, 3 Punkte)**
  Betrachten Sie die logistische Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x) = rx(1-x)$ mit $0 \le x_n \le 1$ und $0 \le r \le 4$. Die erste Bifurkation tritt bei $r_1 = 3,0000$ auf, die zweite bei $r_2 = 3,4492$. Geben Sie basierend auf dieser Information Näherungwerte für den Punkt r_3 der dritten Bifurkation und für den Beginn r_c des chaotischen Bereichs an!
  Hinweis: Geben Sie je eine Formel *oder* die Werte mit drei Nachkommastellen an. Der Wert der Feigenbaumkonstanten beträgt $\delta \approx 4.6692$.

  b) **(Fourier-Transformation, Faltung, 2 Punkte)**
  Ein elektronisches Messgerät soll gleichzeitig den momentanen Mittelwert und die momentane Frequenz eines Signals bestimmen. Die Mittelwert-Bestimmung erfolgt gewichtet mit einer Normalverteilung der Breite (Standardabweichung) σ um die monentane Zeit. Wie sind die Werte der Frequenzmessungen verteilt, wenn das Messgerät optimal arbeitet und das Signal unkorrelierte Zufallszahlen sind?
  Hinweise: Die Normalverteilung kann als Instrumentenfunktion $g(t)$ in einer Faltung

  $$h(t) = g(t) * f(t) \tag{1}$$

  aufgefasst werden. Die Fourier-Transformierte einer Normalverteilung

  $$g(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma)\exp[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)] \tag{2}$$

  ist wiederum eine Normalverteilung, und zwar mit der Breite $1/\sigma$ statt σ.

c) **(Signalanalyse, 1 Punkt)**
Wie könnte das in Teil b) beschriebene Gerät (bzw. Computerprogramm) die momentane Frequenz ermitteln? Beschreiben Sie (in Worten) eine mögliche Vorgehensweise.

- **Aufgabe 4 Lagrange-Interpolation (6 Punkte):**
Vorgegeben ist die folgende Wertetabelle:

x_i	-2	0	1	3
$f(x_i)$	9	5	-3	-1

Gesucht ist ein Interpolationspolynom 3. Grades. Geben Sie die Lagrange-Interpolation an, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten $l_{j,n}(x)$, wenn die Lagrange-Interpolation durch

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} l_{j,n}(x) f(x_j) \tag{3}$$

definiert ist. Geben Sie die Interpolationskurve als Polynom an. Liegt der Punkt (4,21) auf der Kurve, die das Interpolationspolynom beschreibt?

- **Aufgabe 5 Integration nach Gauß (6 Punkte) :**
Es sei

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{m=1}^{N} W_m f(x_m) \tag{4}$$

Die Gewichte W_m und die Stützstellen x_m, an denen die Funktion berechnet wird, sind unbekannt. Nach Gauß werden diese $2N$ Unbekannten so bestimmt, dass die Quadratur von $f(x)$ für die einfachen Polynome $h(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2N-1}$ exakte Ergebnisse liefert.

a) Bestimmen Sie die Gewichte und Stützstellen für $N = 2$. Beachten Sie die Verteilung der x_m in [-1,1].

b) Berechnen Sie mit der für $N = 2$ daraus folgenden Quadraturformel folgendes Integral

$$\int_0^3 (x^2 + 1)dx \quad . \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass die Quadraturformel das exakte Ergebnis liefert!

- **Aufgabe 6 Wellengleichung (6 Punkte):**
Gegeben ist die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad . \tag{6}$$

a) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung bis auf $\mathcal{O}(\Delta x^3), \mathcal{O}(\Delta t^3)$. Formulieren Sie die diskretisierte Gleichung in expliziter Form.

b) Zeige Sie, dass für den so genannten magischen Zeitschritt

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = 1 \tag{7}$$

die diskretisierte Gleichung **exakt** gilt, d.h. sich alle Fehlerterme höherer Ordnung genau wegheben. Hinweis: zeigen Sie, dass dann die höheren Fehlerterme die Wellengleichung (??) erfüllen.

c) Die Lösung der Wellengleichung (??) ist eine ebene Welle der Form

$$u(x,t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)} \tag{8}$$

Die Dispersionsrelation zu (??) lautet $\omega(k) = ck$. Die Diskretisierung führt zu numerischer Dispersion. $\tilde{k}$ beschreibt den Wellenvektor der numerischen Lösung, der i.a. von k abweicht. Gegeben ist

$$u_l^n = u(l\Delta x, n\Delta t) = e^{i(\tilde{k} l \Delta x - \omega n \Delta t)} \tag{9}$$

Setzen Sie (??) in die diskretisierte Gleichung ein und leiten Sie einen Ausdruck für $\cos \omega \Delta t$ ab! Zeigen Sie , dass man mit $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ die exakte Dispersionsrelation erhält!