Institut für Physik
FG Theoretische Physik
W. Hergert

Computational Physics

Abschlussklausur
Wintersemester 2013/14

1 Aufgaben

- **Aufgabe K1:** *operation count*
  Eine symmetrische positiv definite Matrix $\underline{\underline{A}}$ lässt sich als Produkt der Linksdreicksmatrix $\underline{\underline{L}}$ wie folgt darstellen: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{L}}^T$. Damit kann das Gleichungssystem $\underline{\underline{A}}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0$ mit dem sogenannten Cholesky-Verfahren gelöst werden. Der Pseudocode des Verfahrens ist in Abb. 1 gegeben.

  Aufgaben:

  1. Was versteht man unter *operation count*? Wofür ist dessen Kenntnis nützlich? Warum werden nicht alle Operationen gezählt? Erläutern Sie das am vorliegenden Algorithmus!
  2. Erläutern Sie das Cholesky-Verfahren!
  3. Bestimmen Sie den *operation count* der Teilschritte des Verfahrens. Geben Sie den operation count des gesamten Verfahrens an.

  Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(1+n)(1+2n) \tag{1}$$

- **Aufgabe K2:** *Integration nach Chebyshev*
  Es wird das folgende Integrationsverfahren betrachtet

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{m=1}^{N} W_m f(x_m)\ , \tag{2}$$

  wobei die W_m konstante Koeffizienten sind. Chebychev schlug für die Wahl der Abszissen x_m folgendes Verfahren vor:

  1. Die Koeffizienten W_m sind alle gleich.
  2. Die Formel (2) ist exakt für alle Polynome bis zum Grade N.

  Aufgaben:

  1. Erläutern Sie das Gaußsche Integrationsverfahren. Vergleichen Sie die Verfahren nach Gauß und Chebyshev.
  2. Bestimmen Sie die Abszissen des Verfahrens nach Chebychev für $N = 2$.

```
 !
 ! Schritt 1
 !
 for k= 1,2,...,n:
    falls a(k,k) <=0 : STOP
    l(k,k)=SQRT(a(k,k))
    for i= k+1, k+2, ..., n:
        l(i,k)=a(i,k)/l(k,k)
        for j=k+1, k+2, ..., i:
            a(i,j)=a(i,j)-l(i,k)*l(j,k)
        endfor
    endfor
endfor
!
! Schritt 2
!
for i=1,2, ... ,n:
    s=b(i)
    for j=1,2,..., i-1:
        s=s-l(i,j)*c(j)
    endfor
    c(i)=s/l(i,i)
endfor
!
! Schritt 3
!
for i=n,n-1,..., 1::
    s=c(i)
    for k=i+1,i+2,...,n:
        s=s+l(k,i)*x(k)
    endfor
    x(i)=-s/l(i,i)
endfor
```

Abbildung 1: Pseudocode des Cholesky-Verfahrens.

3. Führen Sie die Integration

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

auf die Standardform (2) zurück.

4. Zeigen Sie, dass die Berechnung von

$$\int_{-3}^{1} x\ dx \tag{4}$$

mit dem Verfahren nach Chebyshev das exakte Ergebnis liefert.

- **Aufgabe K3:** *Diskretisierung partieller Differentiagleichungen*
  Vorgegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{5}$$

Aufgaben:

1. Zu welchem Typ gehört die Differentialgleichung (5)?
2. Die Gleichung (5) ist zu diskretisieren. $x_i = ih, (i = 0, 1, \ldots, n), t_j = jk, (j, 0, 1, 2, \cdots)$. Die Funktion wird somit an den Gitterpunkten berechnet, so dass $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$. Für die Zeitableitung soll ein Vorwärtsdifferenzenquotient verwendet werden. Formulieren Sie das Verfahren als explizites Verfahren.
3. Fassen Sie die $u_{i,j}$ zu einer vorgegebenen Zeit als einen Vektor auf und schreiben sie das diskretisierte Verfahren in MatrixForm. Welche Gestalt hat die Matrix, die die Vektoren zur Zeit t_{j+1} und t_j verbindet?
4. Das Verfahren kann verbessert werden, wenn die Ortsdiskretisation zu den Zeiten t_{j+1} und t_j gemittelt werden (Cranck-Nicholson-Verfahren). Stellen Sie entsprechende Gleichung auf.
5. Formulieren Sie das Cranck-Nicholson-Verfahren in Matrixform und geben Sie eine formale Lösung an!

- **Aufgabe K4:** *Zufallszahlen*
  Die Erzeugung von Zufallszahlen hoher Güte mit dem Computer ist eine Grundvoraussetzung für das Funktionieren sogenannter Monte Carlo Verfahren.
  Aufgaben:

1. Was verstehen Sie unter einem linear kongruenten Generator für Zufallszahlen. Erläutern Sie das Verfahren an einem Beispiel! Nennen und erläutern Sie mindestens zwei Verfahren zum Test von Zufallszahlengeneratoren.
2. Zeigen Sie mit Hilfe des Transformationsgesetzes der Wahrscheinlichkeiten, dass mit der Transformationsfunktion $y(x) = (-\ln x)^{1/\alpha}$ aus gleichverteilten Zufallszahlen x, Zufallszahlen gewonnen werden können, die der Weibull-Verteilung

$$p(y) = \frac{\alpha}{\beta} y^{\alpha-1} \exp(-y^\alpha/\beta), \quad o \leq y \leq \infty \tag{6}$$

mit $\beta = 1$ genügen. Zeigen Sie, dass die Verteilung vernünftig normiert ist.

3. Gegeben sind Zufallszahlen z, die ganze, positive Zahlen zwischen 0 und$MAXINT = 2^{31} - 1$ sind und einer Gleichverteilung folgen. Leiten Sie eine Formel her, mit denen man aus den Zahlen z transformierte Zufallszahlen x mit der angegebenen Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte) erhält! Beachten Sie, dass die Verteilungen noch normiert werden müssen.

$$p(x) \sim \delta(x-1) + \delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta(x-4) + \delta(x-5) + \delta(x-6) \tag{7}$$

Stellen Sie eine Formel für ein FORTAN-Programm auf. Die Formel soll direkt (ohne IF-Abfragen) x aus z berechnen.

- **Aufgabe K5:** *Korteweg-de Vries-Gleichung*

1. Für den harmonischen Oszillator gilt:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \tag{8}$$

Überführen Sie die Gleichung in eine dimensionslose Form!

2. Durch geeignete Transformationen

$$u \to k_1 u + k_0 \,,\; x \to k_3 x + k_2 \,,\; t \to k_5 t + k_4 \tag{9}$$

kann man die KdV Gleichung

$$u_t - 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0 \quad , \quad \varepsilon > 0 \tag{10}$$

in eine Vielzahl äquivalenter Gleichungen überführen. Bezeichnet $u(x,t;\varepsilon;c)$ die zum AWP

$$u_t + cuu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0 \quad , \quad \varepsilon > 0,\; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{11}$$

gehörende Lösung, so sind wichtige Beziehungen

$$u(x,t;\varepsilon;c) = u(x/\varepsilon, t/\varepsilon; 1; c) \tag{12}$$
$$u(x,t;\varepsilon;c) = u(\sqrt{a}\; x, \sqrt{a^3}\; t; \varepsilon; c/a) \tag{13}$$
$$u(x,t;\varepsilon;c) = u(x + cVt, t; \varepsilon; c) - V \tag{14}$$

Gleichung (14) stellt die Galilei-Invarianz für beliebige $V \in \mathbb{R}$ sicher.

Zeigen Sie, dass (11) unter den Transformationen (12)-(14) forminvariant ist.

- **Aufgabe K6:** *Fourier-Transformation, Faltung*
Die „Rechteckfunktion“ f(t) soll mit einer anderen „Rechteckfunktion“ g(t) gefaltet werden. Die Funktionen sind durch:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{sonst} \\ 1 & T \le t \le 2T \end{cases} \quad , \tag{15}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{16}$$

gegeben. Man betrachte die Faltung der Funktionen

$$h(t) = f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot g(t-\xi)\, d\xi \quad . \tag{17}$$

Aufgaben:

1. Stellen Sie die grundlegenden Eigenschaften der Faltungsoperation zusammen.
2. Stellen Sie $f(t), g(t)$ und $g(-t)$ grafisch dar und drücken Sie diese Funktionen mittels Θ-Funktionen aus.
3. Stellen Sie das Ergebnis der Faltung $h(t)$ grafisch dar! Die Abbildung hat den Verlauf von $h(t)$ **quantitativ** wiederzugeben.

2 Lösungen

- **Lösung K1:** *operation count*

1. Beim operation count werden nur Multiplikationen und Divisionen gezählt. Ursache dafür ist, dass in Algorithmen zumeist die gleiche Anzahl von Addition bzw. Subtraktionen und Multiplikationen bzw. Divisionen auftreten. Das sieht man am vorliegenden Algorithmus deutlich. Aus dem Skalierungsverhalten der Algorithmen kann man auf die Rechenzeiten schließen.
2. Das Cholesky-Verfahren ist analog zum LU-Verfahren formuliert und funktioniert mittel Vorwärts und Rückwärtseinsetzen. Durch Vorwärtseinsetzen werden die Lösungen $\mathbf{y}$ aus $\underline{\underline{L}}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ gewonnen. Durch Rückwärtseinsetzen wird dann die Lösung $\mathbf{x}$ aus $\underline{\underline{L}}\mathbf{y} + \mathbf{b} = 0$ berechnet.
3. Der operation count wird für die Schriite einzeln ausgewertet. Es ergibt sich:

$$oc1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{i} 1\right) = \frac{1}{6}\left(n^3 + 3n^2 - 4n\right) \tag{18}$$

$$oc2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} 1 + 1\right) = \frac{n}{2}(n+1) \tag{19}$$

$$oc3 = \sum_{i=n}^{1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} 1 + 1\right) = \frac{n}{2}(n+1) \tag{20}$$

Im Detail ergibt sich:

$$oc2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} 1 + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} (i - 1 + n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{21}$$

$$oc2 = \sum_{i=n}^{1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} 1 + 1\right) = \sum_{i=n}^{1} (n - i + 1) = (n+1)n - \sum_{i=n}^{1} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{22}$$

Der operation count für Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen ist gleich.

$$\begin{aligned} oc1 &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{i} 1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} (1 + i - k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i'=1}^{n-k} (1 + i') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(-3k + k^2 + 3n - 2kn + n^2\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(n^3 + 3n^2 - 4n\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$oc = oc1 + oc2 + oc3 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{3} \tag{24}$$

- **Lösung K2:** *Integration nach Chebyshev*

1. Im Gausschen Integrationsverfahren werden Integrale in folgender Form ausgewertet:

$$I = \int_{-1}^{+1} dx\ f(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i) \tag{25}$$

ausgewertet. Die Integrationsgewichte w_i und die Abszissen x_i werden so gewählt, dass Polynome bis zum Grad $(N-1)$ exakt integriert werden.

2. Entsprechend der Definition des Verfahrens muss für $f(t) = 1$ gelten:

$$\int_{-1}^{+1} 1dt = t\ |_{-1}^{+1} = 2 = 2W\ . \tag{26}$$

Damit erhält man $W_m = W = 1$. Weiterhin müssen die Polynome t, t^2 exakt integriert werden. Somit muss gelten:

$$\int_{-1}^{+1} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{+1} = 0 = t_1 + t_2 \tag{27}$$

$$\int_{-1}^{+1} t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} = t_1 + t_2 \tag{28}$$

Somit ergibt sich: $t_{1/2} = \pm 1/\sqrt{3}$.

3. Mit der Transformation

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \tag{29}$$

wird die Integration über das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[-1, +1]$ zurückgeführt.

4. Das Integral liefert

$$\int_{-3}^{+1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-3}^{+1} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4\ . \tag{30}$$

berechnet man das Integral mit der Chebychev-Methode so erhält man:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right\}dt \tag{31}$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\{-1+2t\}\,dt \tag{32}$$

$$= 2\left\{\left(-1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \left(-1+2\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\right\} = -4 \tag{33}$$

Wie erwartet erhält man die exakte Lösung.

- **Lösung K3:** *Diskretisierung partieller Differentiagleichungen*

1. Es handelt sich eine Differentialgleichung vom parabolischen Typ.
2. Diskretisiert erhält man ein explizites Verfahren:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \\ &= u_{i,j}(1-2r) + ru_{i+1,j} + ru_{i-1,j}, \quad r = \Delta t/\Delta x^2 \end{aligned} \tag{34}$$

3. $\mathbf{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots)$ ist der Vektor aller Gitterpunkte zur Zeit t_j. Somit ist $\mathbf{u}_{j+1} = (u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots)$ der entsprechende Vektor zur Zeit t_{j+1}. In Matrixform lautet dann (34)

$$\mathbf{u}_{j+1} = \underline{\underline{A}}\mathbf{u}_j, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} (1-2r) & r & 0 & 0 & \dots \\ r & (1-2r) & r & 0 & \dots \\ 0 & r & (1-2r) & r & \dots \\ 0 & 0 & r & (1-2r) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} - r\underline{\underline{J}}, \quad \underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{35}$$

Die Matrix ist tridiagonal.

4. Die Gleichung lautet :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})\right] \tag{36}$$

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \tag{37}$$

Das Verfahren ist implizit. Die Matrixformulierung lautet:

$$\left(2\underline{\underline{I}} + r\underline{\underline{J}}\right)\mathbf{u}_{j+1} = \left(2\underline{\underline{I}} - r\underline{\underline{J}}\right)\mathbf{u}_j \tag{38}$$

Eine formale Lösung erzielt man, falls die entsprechende inverse Matrix existiert durch:

$$\mathbf{u}_{j+1} = \left(2\underline{\underline{I}} + r\underline{\underline{J}}\right)^{-1}\left(2\underline{\underline{I}} - r\underline{\underline{J}}\right)\mathbf{u}_j \tag{39}$$

- **Lösung K4:** *Zufallszahlen*

1. Lineare Kongruente Zufallszahelngeneratoren sind definiert als

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \mod m, \quad n \geq 0 \tag{40}$$

Dabei ist m der modulus ($m > 0$) a ist der Multiplikator ($o \leq a \leq m$) und c ist das Inkrement ($0ec \leq m$). Für $m = 7, a = 7, c = 7$ erhält man:$7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0, \ldots$.

Tstverfahren sidn zum Beispiel der *frequency test* (unterteilen des Intervalls $[0, 1]$ in Teilintervalle und Untersuchung der Häufigkeit) und der *Spektraltest* (n-Tupel im n-dimensionalen Raum).

2. Umstellen der Transformationsfunktion nach x liefert $x = \exp(-y^\alpha)$. Damit ergibt sich

$$\frac{dx}{dy} = -\alpha y^{\alpha-1}\exp(-y^\alpha) \tag{41}$$

Nach dem Transformationsgesetz der Wahrschenlichkeiten gilt

$$p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{42}$$

wobei $p(x)$ die Gleichverteilung im Intervall $[0, 1]$ ist. Damit ist gezeigt, dass p(y) die Weibullverteilung zu $\beta = 1$ ist, wenn man die vorgegebene Transformationsfunktion verwendet.

3. Aus dem Ansatz: 3P

$$p(x) = A[\delta(x-1) + \delta(x-2) + \delta(x-3) + \delta(x-4) + \delta(x-5) + \delta(x-6)] \tag{43}$$

folgt für die Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = A\sum_{x=1}^{6} 1 = 6A \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = 1/6 \tag{44}$$

Transformation: Die Werte von $z/MAXINT$ liegen zwischen 0 und 1, die von $6z/MAXINT$ also zwischen 0 und 6. Abrunden, $\text{int}(6z/MAXINT)$ führt auf die gleichverteilen Werte $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, zu denen noch 1 zu addieren ist. Als Formel erhält man also:

$$x = \text{int}(6z/MAXINT) + 1. \tag{45}$$

- **Lösung K5:** *Korteweg-de Vries-Gleichung :*

1. Mit $p = p' \cdot p_0$ und $x = x' \cdot x_0$ erhält man mit $p_0 = \sqrt{2mE}$ und $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ die Gleichung $1 = p^2 + x'^2$.
2. Unterstrichene Größen in den Ableitungen meinen immer die Ableitung nach dem Argument. Die transformierte Funktion sei $\tilde{u} = \tilde{u}(\underline{x}, \underline{t}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{c})$. Geht man in der Gleichung (11) für u zu $\tilde{u}$ über, so muss sich eine Gleichung der Form (11) für $\tilde{u}$ ergeben.
   - Für (12) erhält man für $u = u(x/\varepsilon, t/\varepsilon; 1; c)$
   $$u_t = u_{\underline{t}}/\varepsilon\,,\; u_x = u_{\underline{x}}/\varepsilon\,,\; u_{xxx} = u_{\underline{xxx}}/\varepsilon^3 \tag{46}$$
   Damit erhält man also:
   $$\frac{1}{\varepsilon}u_{\underline{t}} + \frac{c}{\varepsilon}uu_{\underline{x}} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^3}u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{47}$$
   $$u_{\underline{t}} + cuu_{\underline{x}} + u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{48}$$
   Damit hat man also für $\tilde{u}$ eine Gleichung der Form (11).
   - Für (13) erhält man für $u = u(\sqrt{a}x, \sqrt{a^3}t; \varepsilon; c/a)$
   $$u_t = \sqrt{a^3}u_{\underline{t}}\,,\; u_x = \sqrt{a}u_{\underline{x}}\,,\; u_{xxx} = \sqrt{a^3}u_{\underline{xxx}} \tag{49}$$
   Damit erhält man also:
   $$\sqrt{a^3}u_{\underline{t}} + c\sqrt{a}uu_{\underline{x}} + \varepsilon^2\sqrt{a^3}u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{50}$$
   $$u_{\underline{t}} + \frac{c}{a}uu_{\underline{x}} + u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{51}$$
   Damit ist man wieder bei (11) für $\tilde{u}$.
   - Für (14) erhält man für $u = u(x + cVt, t, \varepsilon; c) - V$
   $$u_t = u_{\underline{t}} + cVu_{\underline{x}}\,,\; u_x = u_{\underline{x}}\,,\; u_{xxx} = u_{\underline{xxx}} \tag{52}$$
   Damit erhält man also:
   $$u_{\underline{t}} + cVu_{\underline{x}} + c(u - V)u_{\underline{x}} + \varepsilon^2 u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{53}$$
   $$u_{\underline{t}} + cuu_{\underline{x}} + u_{\underline{xxx}} = 0 \tag{54}$$
   Das zeigt die Galilei-Invarianz.

- **Lösung K6:** *Fourier-Transformation, Faltung*

1. Die Faltungsoperation ist kommutativ und assoziativ. Die Operation ist distributiv (linear).
   $$g(t) \otimes (f_1(t) + f_2(t)) = g(t) \otimes f_1(t) + g(t) \otimes f_2(t) \tag{55}$$
2. Die vorgegebene Funktion setzt sich aus zwei Rechtecken zusammen. Es gilt $f(t) = f_1(t) + f_1(t - T/2)$. Die Funktionen $f_1(t)$ und $g(t)$ lassen sich durch Θ-Funktionen ausdrücken:
   $$f_1(t) = \Theta(t + T/2) - \Theta(t - T/2) \tag{56}$$
   $$g(t) = \Theta(t) - \Theta(t - T) \tag{57}$$
   Offensichtlich gilt für $g(-t)$
   $$g(-t) = \Theta(-t) - \Theta(-t - T) = (1 - \Theta(t)) - (1 - \Theta(t + T)) = \Theta(t + T) - \Theta(t) \tag{58}$$

3. Nun kann man sich die Lösung von (17) grafisch veranschaulichen. Abb. 2 zeigt den Prozess der Faltung von $f_1(t)$. Es ist dargestellt, wie sich der Überlapp der Funktionen $f_1(t)$ und $g(t)$ und damit der Wert des Integrals $h_1(t) = f_1(t) \otimes g(t)$ mit t ändert. $h_1(t)$ läßt sich ausdrücken als:

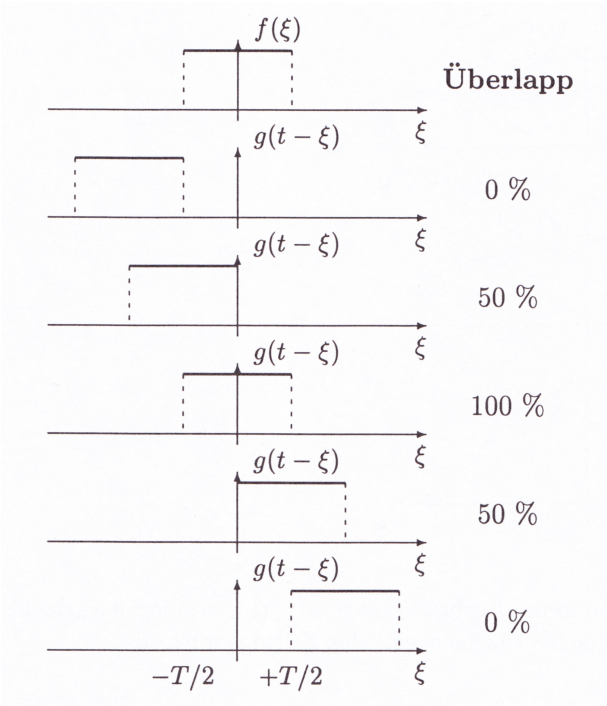

Abbildung 2: Darstellung der Faltung zwischen $f(t)$ und $g(t)$ zu den Zeiten $t = -T/2, 0, +T/2, +3T/2$.

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq -T/2 \\ (t + T/2) & , \quad -T/2 \leq t \leq +T/2 \\ (3T/2 - t) & , \quad +T/2 \leq t \leq +3T/2 \\ 0 & , \quad t \geq +3T/2 \end{cases} \tag{59}$$

Das Resultat der Faltung ist in Abb. 3 dargestellt. Für die Faltung der beiden Rechteckfunktionen erhält man daher

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq -T/2 \\ (t + T/2) & , \quad -T/2 \leq t \leq +T/2 \\ (3T/2 - t) & , \quad +T/2 \leq t \leq +T \\ T/2 & , \quad T \leq t \leq 3T/2 \\ t - T & , \quad 3T/2 \leq t \leq 2T \\ 3T - t & , \quad 2T \leq t \leq 3T \\ 0 & , \quad t \geq +3T \end{cases} \tag{60}$$

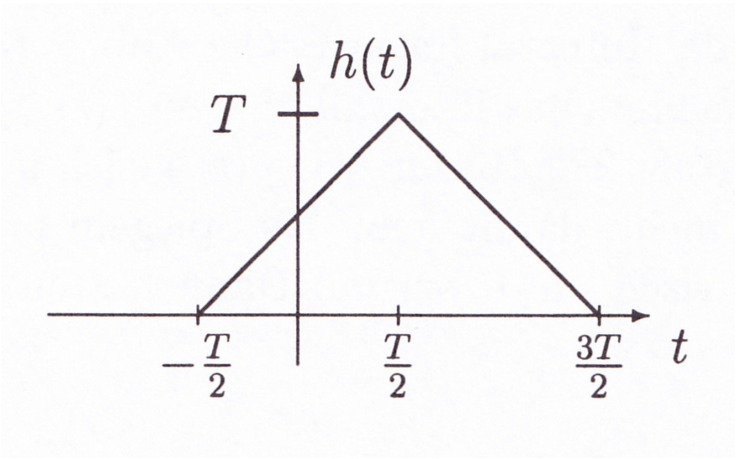

Abbildung 3: Ergebnis der Faltung von $f_1(t)$ mit $g(t) : h_1(t)$.

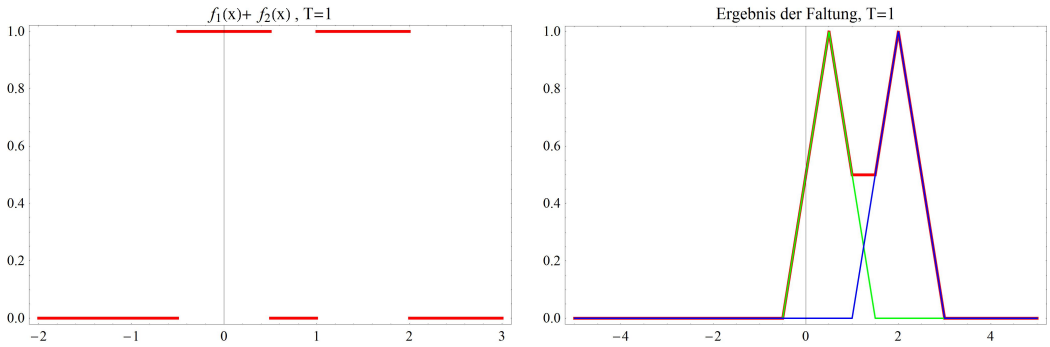

Abbildung 4: Ergebnis der Faltung von $f(t)$ mit $g(t) : h(t)$.