Institut für Physik
FG Theoretische Physik
W. Hergert

Computational Physics

Testklausur

Wintersemester 2013/14

- **Aufgabe T48:** *Operation count*
  Das Verfahren von Hyman dient der Transformation einer unsymmetrischen Matrix auf Hessenberg-Form. Der Algorithmus ist gegeben durch:

```
x(n)=1
y(n)=0
for i=n-1,n-2,...,1
    s=(lambda - h(i+1,i+1))*x(i+1)
    t=x(i+1)+(lambda-h(i+1,i+1))*y(i+1)
    for j=i+1,i+2,...,n
        s=s-h(i+1,j)*x(j)
        t=t-h(i+1,j)*y(j)
    endfor
    x(i)=s/h(i+1,i)
    y(i)=t/h(i+1,i)
endfor
s=(h(1,1)-lambda)*x(1)
t=(h(1,1)-lambda)*y(1)-x(1)
for i=2,...,n
    s=s+h(1,i)*x(i)
    t=t+h(1,i)*y(i)
endfor
```

  Aufgaben:

  1. Was versteht man unter *operation count*? Wofür ist dessen Kenntnis nützlich? Warum werden nicht alle Operationen gezählt? Erläutern Sie das am vorliegenden Algorithmus.
  2. Bestimmen Sie den *operation count* des Verfahrens.

- **Aufgabe T45:** *Diskretisierung von Ableitungen*
  Im Intervall $[a, b]$ sind Daten an den Punkten $x_i, i = 1, \ldots, N$ gegeben. Dabei gilt $x_1 = a$ and $x_N = b$. Der Abstand zweier Punkte ist $x_{i+1} - x_i = h$.

  Aufgaben:

  1. Stellen Sie Formeln für die erste Ableitung der an den Punkten x_i gegebenen Funktion $f(x)$ an den Randpunkten des Intervalls(x_1, x_N) mit der Genauigkeit $\mathcal{O}(h^2)$ auf.
  2. Wie lautet die entsprechende Formel für die inneren Punkte?

3. Erläutern Sie an der zentralen Differenzenformel für die 1. Ableitung die Grundidee des Richardsonschen Extrapolationsverfahrens!

- **Aufgabe T42:** *Kubatur-Formeln*
  Kubatur-Formeln werden für die numerische Auswertung von Doppel-Integralen konstruiert. Angenommen eine Funktion $z = f(x, y)$ ist einem Gebiet Ω definiert und stetig. Zur näherungsweisen Auswertung des Integrals werden Gitterpunkte $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N$ gwählt. Das Doppelintegral wird nun näherungsweise über

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i, y_i) \tag{1}$$

  ausgewertet.
  Es soll nun folgender Spezialfall betrachtet werden. Das Integrationsgebiet R ist ein Rechteck $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$. Die Seiten sind parallel zu den Koordinatenachsen. Die Intervalle $[a, A]$ und $[b, B]$ werden halbiert:

$$x_0 = a \ , \ x_1 = a + h \ , \ x_2 = a + 2h = A \tag{2}$$
$$y_0 = b \ , \ y_1 = b + k \ , \ y_2 = b + 2k = B \tag{3}$$

  Man hat also 9 Punkte um das Integral

$$\int\int_{(R)} f(x,y)dxdy = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy \tag{4}$$

  näherungsweise auszuwerten.
  Aufgabe: Entwickeln Sie eine Kubaturformel auf der Basis der Simpson-Formel.

  Hinweis: Die Simpson-Formeln in x- und y-Richtung werden geschachtelt.

- **Aufgabe T33:** *Verrauschte Daten und Autokorrelation*
  Die Funktion $y(t)$ ist mit einem Detektor gemessen worden, der das wahre Signal $s(t)$ mit einem Rauschen $n(t)$ überlagert.

$$y(t) = s(t) + n(t) \tag{5}$$

  Man zeige, dass man durch das Betrachten der Autokorrelationsfunktion

$$A(\tau) \stackrel{def.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ y(t)y(t+\tau)^{\star} \tag{6}$$

  das Rauschen aus dem Spektrum entfernen kann. Drücken Sie dazu $y(t)$ durch die Fourier-Transformierte

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ Y(\omega)e^{-i\omega t} \tag{7}$$

  aus!