WS 2015/2016 17.02.2016

## Prüfungsklausur „Analysis III / Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x \ln x, \quad x > 0. \tag{1}$$

   a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x = x(t)$ der Differentialgleichung (1). Ist das Anfangswertproblem $x(0) = x_0 > 0$ stets eindeutig lösbar?

   b) $x_* = 1$ ist Equilibrium der Differentialgleichung (1). Ist dieses stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} = e^t.$$

3. Wir betrachten das (vereinfachte) Epedemie-Modell

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u\,v, & u(0) &= u_0, \\ \dot{v}(t) &= u\,v - v, & v(0) &= v_0, \end{aligned}$$

   mit nicht negativen Anfangswerten $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2_+$.

   a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem für beliebiges $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2_+$ eine eindeutige lokale Lösung hat.

   b) Zeigen Sie, dass diese lokale Lösung $(u, v)$ für alle $t \geq 0$ nicht negativ bleibt.

   c) Zeigen Sie mittels b), dass die Lösung $(u, v)$ in ihrem Existenzintervall $[0, t_+)$ nach rechts beschränkt bleibt. Was bedeutet das für $t_+$?

   d) Berechnen Sie alle Equilibria (stationäre Punkte) des Systems, d.h. $(u(t), v(t)) \equiv (u_0, v_0)$ $\forall t \geq 0$.

   e) Bestimmen Sie ein erstes Integral $H \in C^1(\mathbb{R}^2_+)$ des Systems, und skizzieren Sie im ersten Quadranten der $u, v$-Ebene einige Trajektorien des Phasenporträts. Kennzeichnen Sie die Richtungen der Lösungskurven durch Pfeile.

1. Gegeben sei das homogene System $\dot{x} = Ax$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Laut Vorlesung existiert jede Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$ global, also $(t_-, t_+) = (-\infty, \infty)$. Welcher Satz wurde für diese Aussage benutzt?

   b) Angenommen, die Matrix $A$ habe einen rein imaginären Eigenwert $\lambda_1$. Sind dann alle Lösungen von (2) beschränkt, oder gibt es auch unbeschränkte Lösungen? (kurze Begründung!)

   c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

   und berechnen Sie die zugehörige Wronski-Determinante. Wie lautet die allgemeine Lösung des Systems?