# Prüfungsklausur „gewöhnliche Differentialgleichungen“

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Gegeben sei das AWP ($k \in \mathbb{Z}$ fest)

$$y'(t) = \frac{\cos y}{y^k}, \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

   a) Offenbar ist $y(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ eine Lösung zu $y_0 = \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie durch Nachweis der Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf, dass dies die einzige Lösung ist.

   b) Begründen Sie mit einem geeigneten Satz der Vorlesung, dass das Problem (1) für jedes $y_0 \neq 0$ eine eindeutige lokale Lösung besitzt.

   c) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ können Sie eine Aussage über die globale Existenz der Lösung aus b) machen?

2. a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(t) = \frac{-y^2}{1+t^2}$.

   b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ für obige Differentialgleichung und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

3. Seien $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zwei verschiedene Lösungen der linearen Dgl. $y' + g(t)y = h(t)$. Wie lautet dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem $ty' + y = \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0.$

5. Berechnen Sie für die linearen Systeme der Form $Y'(t) = AY(t)$ mit den konstanten Koeffizientenmatrizen

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   jeweils ein Fundamentalsystem.

6. Wählen Sie aus den Vektoren

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} 4e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = \begin{pmatrix} 4e^t - 2e^{-2t} \\ e^t - 2e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad Y_4(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

   ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 3e^t \end{aligned},$$

   berechnen Sie die Wronski-Determinante für Ihre Auswahl und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.