Prüfungsklausur „gewöhnliche Differentialgleichungen“

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Gegeben sei das AWP
$$y' = t\cos(y^2)\,, \quad y(0) = 0. \tag{1}$$
   a) Zeigen Sie, dass das AWP in einer Umgebung von $t = 0$ eine eindeutige Lösung hat.
   b) Zeigen Sie, dass die Lösung von (1) auf ihrem maximalen Existenzintervall die Abschätzung $|y(t)| \leq \frac{1}{2}t^2$ erfüllt.
   c) Begründen Sie, dass das maximale Existenzintervall (t^-, t^+) ganz $\mathbb{R}$ ist.
   d) Hat die Lösung von (1) bei $t = 0$ eine lokalen Extremwert?

2. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und
$$y' = f(y) \tag{2}$$
   die zugehörige autonome Differentialgleichung.
   a) Begründen Sie, dass das AWP $y(0) = y_0$ zu (2) stets eine eindeutige lokale Lösung hat.
   b) Weisen Sie nach, dass jede Lösung von (2) in ihrem Existenzintervall beliebig oft differenzierbar ist.
   c) Zeigen Sie: Falls eine Lösung von (2) ein lokales Minimum oder Maximum besitzt, dann ist diese Lösung identisch konstant.

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen
   a) $y' = \dfrac{ty^2}{\sqrt{1+t^2}}$ und b) $y' - \dfrac{2}{t}y = 2t \quad (t > 0)$.

4. Transformieren Sie die Differentialgleichung
$$y''' - y'' - 2y' = 0 \tag{3}$$
   auf ein System 1. Ordnung und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem sowohl für dieses System als auch für die gegebene skalare Gleichung (3). Wie lautet die allgemeine Lösung von (3)?

5. Gegeben sei das System
$$y'(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y(t)\,, \tag{4}$$
   wobei a eine reelle Konstante ist.
   a) Berechnen Sie für $a \neq -1$ ein Fundamentalsystem von (4).
   b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die stationäre Lösung $y \equiv 0$ stabil?
   c) Bestimmen Sie für $a = 1$ die Exponentialmatrix e^{At} mit Hilfe des Hauptfundamentalsystems. $\Rightarrow t_0 = 0$