WS 2016/2017 15.02.2017

Prüfungsklausur „Analysis III / Gewöhnliche Differentialgleichungen“

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Berechnen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \frac{1}{2}(1+y)^3 \cos t\,, \qquad y(0) = y_0,$$

für die Anfangswerte $y_0 = 0$, $y_0 = -1$ und $y_0 = -2$, und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall (t_-, t_+) an.

2. Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung

$$(2xy + 2y^2)dx + (x^2 + 4xy + 3y^2)\,dy = 0$$

exakt ist, und bestimmen Sie alle Lösungen.

Das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ hat zwei Lösungen. Geben Sie die beiden Lösungen an. Ist das ein Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf? /

3. Wir betrachten die beiden Anfangswertprobleme

$$y'(t) = y(t) + e^t, \qquad y(1) = e, \tag{1}$$
$$z'(t) = \sin z(t) + e^t, \qquad z(1) = e. \tag{2}$$

Die Gleichung in (2) ist nichtlinear und kann nicht explizit gelöst werden.

   a) Berechnen Sie die Lösung von (1).
   b) Begründen Sie, dass das AWP (2) eine eindeutige Lösung hat und diese Lösung z : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **global** existiert.
   c) Schreiben Sie (1) und (2) als Integralgleichungen (Fixpunktgleichungen, so wie beim Satz von Picard Lindelöf).
   d) Schätzen Sie die Differenz $|y(t) - z(t)|$ der Lösungen von (1) und (2) aus c) mit der Lösung aus a) und dem Gronwallschen Lemma möglichst gut durch eine berechenbare Funktion $g(t)$ ab.
   Verwenden Sie dazu die Abschätzung $|\sin y - y| \le |y|^3/6$ für $y \in \mathbb{R}$.

4. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem zum Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y,$$

und berechnen Sie die zugehörige Wronski-Determinante.

Zusatzfrage: Ist die triviale Lösung $y^*(t) \equiv (0,0)^T$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

Zusatzaufgabe:

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung

$$y''' - y' = 0$$

(direkt berechnen, nicht auf System transformieren). Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - y' = 1\,?$$

Bitte beachten Sie die Rückseite!

Nützliche Formeln:

- $\int t^3 e^{3t} dt = \frac{1}{27} e^{3t}(9t^3 - 9t^2 + 6t - 2) + c$
- Gronwall-Ungleichung für $\beta = 1$:

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \varphi(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{t-s}\alpha(s)\, ds$$

Das Integral $\int_a^t e^{t-s}\alpha(s)\, ds$ in Aufgabe 3.d) bitte nicht ausrechnen.

Punkteverteilung: 7, 6, 11, 6(+1), +5