Prüfungsklausur „Funktionentheorie“

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z = x + iy$ der komplexen Ebene die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie dort ggf. die erste Ableitung $f_i'(z)$:

   a) $f_1(z) = e^x(\cos y - i \sin y)$, b) $f_2(z) = e^x(\sin y - i \cos y)$

2. Geben Sie ***alle*** in einer Umgebung von $z = 0$ holomorphen Funktionen mit $f^{(n)}(0) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ an und begründen Sie das Ergebnis.

3. Bestimmen Sie auf der Einheitskreisscheibe $\{z : |z| \leq 1\}$ Minimum und Maximum (des Betrages) der Funktion

   $$f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

4. Geben Sie die Potenz- bzw. Laurentreihe von

   $$\frac{1 - z^4}{z^4} \quad \text{und} \quad \frac{z^4}{1 - z^4}$$

   in einer Umgebung von $z_0 = 0$ an. Wo konvergieren diese Reihen?

5. Sei f eine in einer Umgebung $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion, die in z_0 einen Pol n-ter Ordnung habe.

   Welche Singularität hat die Ableitung f' in z_0? Berechnen Sie $\mathrm{Res}_{z_0} f'(z)$.

6. a) In welchen Punkten haben

   $$\frac{z}{\sin z} \quad \text{und} \quad \frac{z}{e^z + 1}$$

   isolierte Singularitäten, und von welchem Typ sind diese?

   b) Berechnen Sie die Integrale

   $$\int_\gamma \frac{z^3}{(z-1)^2}\, dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma (z+1)\, e^{1/z}\, dz\,,$$

   wobei γ die einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Kreislinie $|z| = 5$ ist.