KLAUSUR
22. JULI 2013

Insgesamt können mit der Klausur 40 (+2) Punkte erworben werden. 32 Punkte aus allen Aufgaben entspricht 100%.

1. Aufgabe (6 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie das thermodynamische Verhalten eines ultrarelativistischen Gases aus N Teilchen, die sich im Volumen V mit der Temperatur T befinden. Die Hamiltonfunktion ist näherungsweise durch

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N} c\,|\vec{p}_i|$$

gegeben. Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

- (2 Punkte) Berechnen Sie das klassische Zustandsintegral.
- (1 Punkte) Finden Sie daraus die freie Energie $F(T,V)$.
- (2 Punkte) Berechnen Sie die Zustandsgleichung $p = p(T,V)$.
- (1 Punkte) Finden Sie die innere Energie E.
- (2 Zusatzpunkte) Wie lautet der exakte Ausdruck für H und unter welchen Bedingung gilt die angegebene Hamiltonfunktion.

Hinweis: Da die Energie nur vom Betrag des Impulses abhängt, verwenden Sie Kugelkoordinaten. Es gilt

$$\int_0^\infty dy y^n e^{-\alpha y} = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}\,;\, \Gamma(n) = (n-1)!\,, \quad \alpha > 0\,.$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Die Energieniveaus eines eindimensionalen harmonischen Oszillators sind $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\,, \quad n = 0, 1, \ldots \infty$. Untersuchen Sie das thermodynamische Verhalten eines Systems im Wärmebad ohne Teilchenaustausch, welches aus N ungekoppelten harmonischen Oszillatoren besteht.

- (2 Punkte) Berechnen Sie die Zustandssumme eines Oszillators. Hinweis: Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,, \quad q < 1$.
- (1 Punkt) Finden Sie die Zustandssumme für N-Oszillatoren.
- (1 Punkt) Wie lautet die freie Energie?

- (1 Punkte) Berechnen Sie die innere Energie E des Systems.
- (1 Punkte) Finden Sie aus der inneren Energie die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ für das n-te Niveau. Hinweis: Alternativ lässt sich $\langle n \rangle$ auch direkt aus der Definition des Mittelwerts berechnen.
- (2 Punkte) Untersuchen Sie die Energie in den beiden Grenzfällen $\hbar\omega \gg k_B T$ bzw. $\hbar\omega \ll k_B T$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei ein Gasgemisch bestehend aus zwei idealen einatomigen Gasen (Gas a: N_a Teilchen, Masse m_a bzw. Gas b: N_b Teilchen, Masse m_b, N_a, N_b fest). Das Gasgemisch befinde sich im Volumen V bei der Temperatur T im thermodynamischen Gleichgewicht.

- (2 Punkte) Warum gilt für die kanonische Zustandssumme $Z(V,T) = Z_a(V,T)\, Z_b(V,T)$?
- (2 Punkte) Was folgt daraus für die freie Energie und die Entropie des Gasgemischs?
- (2 Punkte) Was gilt für den Druck des Gasgemischs?

4. Aufgabe (12 Punkte)

Finden Sie mit dem Jaynesschen Prinzip die kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilungsfunktion $\rho(\vec{v})$ eines Teilchens mit fester kinetischer Energie $\frac{m}{2}\langle \vec{v}^{\,2} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

- (3 Punkte) Formulieren Sie das Jaynessche Prinzip für dieses Problem. Verwenden Sie dazu die Entropie $S = -k_B \int d^3v \rho(\vec{v}) \ln(\rho(\vec{v})/\rho_0)$ mit $\rho_0 =$ const.. Welche Nebenbedingungen müssen erfüllt sein.
- (3 Punkte) Bestimmen Sie $\rho(\vec{v})$ aus dem Jaynesschen Prinzip.
- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lagrange Parameter. Beachten Sie, dass es sich um $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ handelt, die Verteilungsfunktion aber separiert. Verwenden Sie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2 y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp(-a^2 y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}$$

- (3 Punkte) Finden Sie die Verteilungsfunktion $\rho(|\ \vec{v}\ |)$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Die freie Energie $F(T, V, N)$ eines idealen Bosegases mit N Teilchen im Volumen V sei durch den Ausdruck

$$F(T, V, N) = -\alpha\, V\, T^4$$

gegeben, wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist.

- (2 Punkte) Berechnen Sie die Entropie und finden Sie daraus die Adiabatengleichung.
- (2 Punkte) Berechnen Sie Druck und die innere Energie E.
- (2 Punkte) Finden Sie das chemische Potential.
- (2 Punkt) Finden Sie den Zusammenhang zwischen dem großkanonischen Potential Θ und der inneren Energie E.

LÖSUNG-KLAUSUR
22. JULI 2013

1. Aufgabe (6 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Keine Wechselwirkung, nicht unterscheidbare Objekte

$$Z(T,V;N) = \frac{1}{N!}\left[Z(T,V,N=1)\right]^N \,.$$

Mit Stirling'scher Formel, Integration in Kugelkoordinaten ergibt sich

$$Z(1) = \frac{1}{h^3}\int d^3r d^3p e^{-\beta cp} = \frac{8\pi V}{(hc)^3}(k_BT)^3 = \frac{V}{\lambda_T^3}\,.$$

Bemerkung: Die thermische d'Broglie Wellenlänge ist hier: $\lambda_T = hc/(k_BT(8\pi)^{1/3})$.
Die freie Energie ist $F(T,V) = -Nk_BT\ln Z(1)$. Zustandsgleichung:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V}\,.$$

Innere Energie:

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = 3Nk_BT = Nc\,\langle\,|\,\vec{p}\,|\,\rangle\,.$$

Man kann den Mittelwert des Impuls auch direkt aus der Definition berechnen

$$\langle\,|\,\vec{p}\,|\,\rangle = \frac{\int d^3p\;|\,\vec{p}\,|\,e^{-\beta c|\vec{p}|}}{\int d^3p\,e^{-\beta c|\vec{p}|}} = \frac{\Gamma(4)(\beta c)^3}{\Gamma(3)(\beta c)^4} = \frac{3k_BT}{c}\,.$$

Ultrarelativistisch bedeutet kleine Ruheenergie

$$H_i = \sqrt{c^2\vec{p}_i{}^2 + m^2c^4} \simeq c\,|\,\vec{p}_i\,|\,(1 + \frac{m^2c^2}{2\,p_i^2} + \ldots)$$

Das Ergebnis ist exakt für ein Teilchen mit der Ruhemasse Null (z.B. Photon).

2. Aufgabe (8 Punkte)

$$Z(N=1) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\,.$$

N-Oszillatoren $Z(N) = Z(1)^N$.
Freie Energie:

$$F = \frac{N\hbar\omega}{2} + Nk_BT\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}] \equiv F_0 + F_1$$

F_0: Jeder der N Oszillatoren im Grundzustand, F_1: Angeregte Zustände bei $T \neq 0$.

Innere Energie:

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = N\hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}+\frac{1}{2}\right) \equiv N\langle\varepsilon_n\rangle = N\hbar\omega\left(\langle n\rangle + \frac{1}{2}\right).$$

Die letzte Beziehung gilt bei Wechselwirkungsfreiheit. Die mittlere Besetzungszahl ist daher

$$\langle n\rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,.$$

Die Besetzungszahl entspricht der eines Bosesystems mit dem chemischen Potential $\mu = 0$. Dimensionsloser Parameter $y = \frac{\hbar\omega}{k_BT}$ entspricht: (typische Oszillatorenergie)/(typische Wärmeenergie). Alternative Berechnung: Verwende Definition des Mittelwerts:

$$\langle n\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} \equiv -\frac{\partial}{\partial y}\ln\sum_{n=0}^{\infty} e^{-yn} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(1-e^{-y}) = \frac{1}{e^y-1}\,.$$

Tiefe Temperaturen $y \gg 1$; hohe Temperaturen $y \ll 1$. Man erhält:
$E(T=0) = N\hbar\omega/2$, alle Oszillatoren im Grundzustand.

$$E(y\gg 1) \simeq \frac{N\hbar\omega}{2} + N\hbar\omega e^{-\hbar\omega/(k_BT)}; \quad E(y\ll 1) \simeq Nk_BT\,.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Da keine Wechselwirkung auftritt, ist die Zustandssumme einfach das Produkt der beiden Teilzustandssummen. Die freie Energie als $F = -k_BT\ln Z$ ist daher die Summe $F = F_a + F_b$. Das gleiche gilt für die Ableitungen nach V bzw T, also $p = p_a + p_b$ (Gesetz von Dalton).

4. Aufgabe (12 Punkte)

Das Jaynesschen Prinzip beinhaltet die Bedingung maximaler Entropie unter Nebenbedingungen. Hier ist $S = -k_B\int d^3v\rho(\vec{v})\ln(\rho(\vec{v})/\rho_0)$ mit $\rho_0 =$ const.. Die beiden Nebenbedingungen lauten

$$(1)\ \int\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}\rho(\vec{v})d^3v = \frac{3}{2}k_BT \text{ bzw. } \int\vec{\mathrm{v}}^{\,2}\rho(\vec{\mathrm{v}})\mathrm{d}^3\mathrm{v} = \frac{3\mathrm{k_B T}}{\mathrm{m}}\,;\quad (2)\ \int\rho(\vec{\mathrm{v}})\mathrm{d}^3\mathrm{v} = 1\,.$$

Die beiden Nebenbedingungen werden durch die 2 Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2 charakterisiert. Die Variationsaufgabe führt auf $\delta S[\rho] = S[\rho+\delta\rho] - S[\rho] = 0$, wobei S die Entropie unter Einschluß der Nebenbedingungen ist: Die Extremalbedingung liefert

$$\rho(\vec{v}) = Ae^{-(\lambda_1/k_B)\,\vec{v}^{\,2}}\,,\quad A = e^{-(\lambda_2/k_B+1)}\,.$$

Die Konstante A (oder λ_2) folgt aus der Normierung (entspricht Nebenbedingung (2))

$$A\left(\int e^{-\lambda_1/k_Bv_x^2}dv_x\right)^3 = 1\,.$$

Ergebnis $A = \left(\frac{\lambda_1}{k_B\pi}\right)^{3/2}$.

Der Lagrange-Parameter λ_1 folgt aus der 1. Nebenbedingung (fixierte Einteilchenenergie) zu $\lambda_1 = m/2T$. Beachten Sie: $\langle \vec{v}^{\,2} \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle$.
Gesamtergebnis:

$$\rho(\vec{v}\,) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp(-\beta \frac{m\vec{v}^{\,2}}{2})\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist: $dw(\vec{v}) = \rho(\vec{v}) d^3v$.
Ist man nur an der Verteilungsfunktion für den Betrag der Geschwindigkeit $\mid \vec{v} \mid = v$ interessiert, so findet man die reduzierte Verteilungsfunktion durch Einführung von Kugelkoordinaten $d^3v = v^2 dv d\Omega$. Die reduzierte Verteilungsfunktion: $dw(v) = \rho(v)dv$ erhält man durch Abintegration über den Raumwinkel:

$$\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp(-\beta \frac{mv^2}{2})\,.$$

Die letzte Verteilung heißt auch Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Entropie:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = 4\alpha V T^3$$

Adiabatengleichung:

$$S = \text{const} \rightarrow \mathrm{VT}^3 = \text{const}$$

Druck:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \alpha T^4$$

Innere Energie:

$$E = F + TS = 3\alpha V T^4$$

Chemisches Potential::

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = 0$$

Das großkanonische Potential

$$\Theta = E - TS - \mu N = -\alpha V T^4 = -\frac{E}{3}\,.$$

Diese Aufgabe betrifft das Photonengas, welches bereits in der Serie 10 behandelt wurde.