Theoretischen Physik II **SS 2007**

Klausur I - Aufgaben und Lösungen

- **Aufgabe 1** *Elektrostatik*
  Im Mittelpunkt einer leitenden und geerdeten Hohlkugel (Radius$R$) befindet sich eine kleine Kugel mit homogener Ladungsverteilung ρ_0 (Radius R_k, Gesamtladung Q)

  a) Geben Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ innerhalb und außerhalb der kleine Kugel vom Radius R_k an!

  b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) das elektrische Potential $\varphi(r)$ für das gegebene Problem im ganzen Raum!

  c) Berechnen Sie die auf der Oberfläche der Hohlkugel vom Radius R durch Influenz erzeugte Ladungsdichte σ sowie die daraus resultierende Gesamtladung Q_{inf}!
  Hinweis: $\sigma = \epsilon_0 E_a^n$

- **Lösung 1 :** *Elektrostatik* **8P**

  a) Für die elektrische Feldstärke im Inneren und außerhalb der homogen geladenen Kugel erhält man: 2P

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{R_k^3} \quad , \quad r < R_k \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad r > R_k \tag{2}$$

  Diese Ergebnisse sind aus Vorlesung und Übung als bekannt voraus zu setzen. Ansonsten kann man die Ergebnisse natürlich auch über den physikalischen Satz von Gauß berechnen.

  b) Der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Potential ist gegeben durch $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Durch Integration erhält man 3P

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \varphi_0 \tag{3}$$

  Das Potential ist nur bis auf eine Konstante bestimmt. Da im vorliegenden Fall gilt: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\mathbf{e}_r$ hat man zu berechnen:

$$\varphi(r) = -\int_0^r E(r')dr' + \varphi_0 \tag{4}$$

  Aus (1) und (2) folgt mit (4):

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R_k^3} + \varphi_0 \quad , \quad r < R_k \tag{5}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \varphi_1 \quad , \quad r > R_k \tag{6}$$

Die Konstante φ_1 wird so eingerichtet, dass in (6) das Potential an $r = R$ verschwindet. Es ergibt sich also für $r > R_k$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{7}$$

Die Konstante φ_0 wird so bestimmt, dass Stetigkeit an $r = R_k$ gewährleistet ist. Es ergibt sich somit:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{2R_k} - \frac{r^2}{2R_k^3} - \frac{1}{R}\right) \tag{8}$$

c) Die äußere Kugel ist leitend. Auf der Oberfläche werden also Ladungen influenziert die dafür sorgen, dass die Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen. Man beachte, dass hier in der Grenzbedingung die Innenfläche der äußeren Kugel betrachtet wird, deren Flächennormale durch $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ gegeben ist. Dadurch ergibt sich mit (2) 3P

$$\sigma = \epsilon_0 E_a n = \epsilon_0 \mathbf{E}(R)\cdot\mathbf{n} = -\epsilon_0 \mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_r = -\epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = -\frac{Q}{4\pi R^2} \tag{9}$$

Damit ergibt sich die influenzierte Gesamtladung durch Integration über die Kugeloberfläche zu $Q_{inf} = -Q$.

- **Aufgabe 2** *Magnetostatik*
  Berechnen Sie zu einem zylindersymmetrischen Magnetfeld der Struktur

$$\mathbf{B} = B(s)\mathbf{e}_\varphi \quad , \quad B(s) = \frac{\mu_0 j_0 a^2}{s}\left(1 - e^{-s/a}\right) \quad , \quad s^2 = x^2 + y^2 \tag{10}$$

  a) die zugehörige Stromverteilung **j**!

  b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) den Gesamtstrom I durch eine Kreisfläche vom Radius r um die z-Achse und diskutieren Sie die Grenzfälle $r \to 0$ und $r \gg a$!

- **Lösung 2 :** *Magnetostatik* **8P**

  a) Die Stromverteilung erhält man über die Maxwellgleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$. Man muss also die Rotation in Zylinderkoordinaten auswerten. Der Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch: 4P

$$\nabla = \mathbf{e}_s\partial_s + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{s}\partial_\varphi + \mathbf{e}_z\partial_z \tag{11}$$

Mit $B = B(r)\,\mathbf{e}_\varphi$ sieht man sofort, dass nur die ersten beiden Summanden bei der Auswertung der Rotation einen Beitrag liefern.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial s}B(s)\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_\varphi + \frac{B(s)}{s}\mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{12}$$

Mit $\partial/\partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$ erhält man :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{s}B(s) + \frac{\partial}{\partial s}B(s)\right)\mathbf{e}_z \tag{13}$$

Man kann natürlich auch die Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten (Auswertung der Hilfsdeterminante) verwenden. Mit (10) erhält man aus (13) für die Stromdichte:

$$\mathbf{j} = j_z\,\mathbf{e}_z = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} \quad , \quad j_z(s) = j_0 a \frac{1}{s} e^{-s/a} \tag{14}$$

b) Der Gesamtstrom ergibt sich aus : 4P

$$I = \int\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int_0^r \int_0^{2\pi} j_0 a \frac{1}{2} e^{-s/a} s ds d\varphi = 2\pi j_0 a^2 \left(1 - e^{-r/a}\right) \tag{15}$$

Als Grenzfälle ergeben sich:

$$\lim_{r\to 0} I(r) = 0 \quad , \quad \lim_{r\to\infty} I(r) = 2\pi j_0 a^2 \tag{16}$$

- **Aufgabe 3** *Magnetostatik*
  Durch einen unendlich langen, geraden Leiter vom Radius R ($\mu_r = 1$) fließt ein elektrischer Strom parallel zur Zylinderachse (z-Achse) mit einer Stromdichte

$$\mathbf{j} = j(s)\mathbf{e}_z \quad , \quad j(s) = j_0 \left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right) \quad , \quad s^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad j_0 = const. \tag{17}$$

  a) Formen Sie die zugehörige Maxwellsche Gleichung mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes um!

  b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters! Berücksichtigen Sie dabei die Symmetrie des Problems!

- **Lösung 3 :** *Magnetostatik* **8P**

  a) Aus der Gleichung $\nabla \times B = \mu_0 \mathbf{j}$ folgt mit dem Satz von Stokes: 3P

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int\int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \tag{18}$$

  b) Für das Magnetfeld kann man auf Grund der Symmetrie ansetzen: $\mathbf{B} = B(s)\mathbf{e}_\varphi$ 5P
  Das Linienintegral in (18) liefert bei der Integration über einen Kreis (entlang einer Feldlinie)

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi s B(s) \tag{19}$$

  Die rechte Seite in (18) liefert I(s), den durch eine Fläche des Radius s fließenden Strom.
  Für $s > R$ erhält man gerade den Gesamtstrom:

$$I = 2\pi j_0 \int_0^R \left(1 - \frac{s^2}{R^2}\right) s ds \tag{20}$$

$$= 2\pi j_0 \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{2} j_0 R^2 \tag{21}$$

Für einen Radius $s < R$ erhält man:

$$I(s) = 2\pi j_0 \int_0^s \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) x dx \tag{22}$$

$$= 2\pi j_0 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4R^2}\right]_0^s = 2\pi j_0 \frac{s^2}{2}\left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right) \tag{23}$$

$$= \frac{2Is^2}{R^2}\left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right) \tag{24}$$

Mit (18) und(19) erhält man:

$$B(s) = \frac{\mu_0}{2\pi s} I(s) \tag{25}$$

Damit ergibt sich für das Feld:

$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad , \quad s > R \tag{26}$$

$$B(s) = \frac{\mu_0}{\pi R^2} Is\left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right) \quad , \quad s < R \tag{27}$$

- **Aufgabe 4** *Potentiale, Lorentz-Eichung*
  Mit Hilfe der Lorentz-Eichung gelingt es, die Wellengleichungen für die elektromagnetischen Potentiale $\mathbf{A}$ und φ zu entkoppeln.

  a) Leiten Sie die inhomogene Wellengleichung für das Vektorpotential $\mathbf{A}$ aus der entsprechenden Maxwellschen Gleichung für Stromverteilungen im Vakuum ab! Verwenden Sie die Lorentz-Eichung!

  b) Betrachtet werden soll der Grenzfall $c \to \infty$. Geben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung in Form einer quellenmäßigen Darstellung für die Potentiale $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und $\varphi(\mathbf{r}, t)$ an!

  c) Zeigen Sie, dass die Darstellungen für $\mathbf{A}$ und φ die Lorentz-Eichung erfüllen. Verwenden Sie dabei die Kontinuitätsgleichung und beachten Sie:

$$\nabla_r \frac{1}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} = -\nabla_{r'} \frac{1}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} \tag{28}$$

- **Lösung 4 :** *Potentiale, Lorentz-Eichung* **8P**

  a) Ausgangspunkt ist die Maxwell-Gleichung 3P

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} \tag{29}$$

  Setzt man die Darstellungen der Felder durch die Potentiale $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}$ in (29) ein erhält man:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}) - \Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{30}$$

Die Verwendung der Lorentz-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} + \dot{\varphi}/c^2 = 0$ liefert:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{31}$$

b) Mit $c \to \infty$ gehen die inhomgenen Wellengleichungen in Poisson-Gleichungen über. Laufzeiteffekte spielen keine Rolle. Anstatt der retardierten Potentiale erhält man "instantane" Potentiale: 2P

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{4\pi\mu_0^{-1} \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} \tag{32}$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{4\pi\epsilon_0 \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} \tag{33}$$

c) Man hat $\nabla_r \cdot \mathbf{A}$ auszuwerten. 3P

$$\nabla_r \cdot \mathbf{A} = \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{4\pi\mu_0^{-1}} \nabla_r \frac{1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} \tag{34}$$

$$= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{4\pi\mu_0^{-1}} \left(-\nabla_{r'} \frac{1}{\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}\right) \tag{35}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{4\pi\mu_0^{-1} \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid}\right) + \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\nabla_{r'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{4\pi\mu_0^{-1} \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} \tag{36}$$

Der erste Summand kann mit dem Satz von Gauß in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Bei Stromverteilugen im Endlichen verschwindet dieser Beitrag. Setzt man dieses Ergebnis zusammen mit der Zeitableitung des skalaren Potentials (33) in die Lorentz-Eichung ein erhält man:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{1}{4\pi\mu_0^{-1} \mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid} \left(\nabla_{r'}\mathbf{j} + \frac{\mu_0^{-1}}{c^2}\dot{\rho}\right) = 0 \tag{37}$$

Die Klammer enthält die Kontinuitätsgleichung.
81ex]

- **Aufgabe 5** *Elektromagnetische Wellen*
Gegeben sei die magnetische Induktion einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = B_0 \cos(ky - \omega t)\mathbf{e}_x - B_0 \sin(ky - \omega t)\mathbf{e}_z \tag{38}$$

a) In welche Richtung breitet sich die Welle aus? Welcher Polarisationszustand liegt vor? begründen Sie Ihre Aussage!

b) Berechnen Sie die Komponenten des elektrischen Feldes $\mathbf{E}$ und geben Sie die komplexe Darstellung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ an!

c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$!

- **Lösung 5 :** *Elektromagnetische Wellen* **8P**

a) Die Ausbreitungsrichtung kann man aus der Phase der ebenen Welle ablesen: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = ky - \omega t$ bedeutet $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_y$. Die Welle ist zirkular polarisiert, da die x- und z-Komponente die gleiche Amplitude haben und die Phasenverschiebung $\pi/2$ beträgt. 2P

b) Das $\mathbf{E}$-Feld kann man über $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega\mathbf{E}/c^2$ berechnen (s. Vorlesung). Man erhält: 4P

$$\mathbf{E} = cB_0 \left(\sin(ky - \omega t), 0, \cos(ky - \omega t)\right) \tag{39}$$

Für die komplexe Darstellung der Felder ergibt sich:

$$\mathbf{B} = \Re\left\{B_0 \left(e^{iky}, 0, e^{i(ky-\pi/2)}\right) e^{-i\omega t}\right\} \tag{40}$$

$$\mathbf{E} = \Re\left\{cB_0 \left(e^{i(ky-\pi/2)}, 0, e^{iky}\right) e^{-i\omega t}\right\} \tag{41}$$

c) Für den Poynting-Vektor ergibt sich: 2P

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \mathbf{e}_y \tag{42}$$