Theoretische Physik A – Zwischenklausur Sommersemester 2008

6. Juni 2008, Dozent: J. Kantelhardt

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen (Abgabe auf getrennten Stapeln für alle Aufgaben). Die Schritte des Lösungswegs müssen klar erkennbar sein – ein Verweis auf Computeralgebra reicht nicht. Bearbeitungszeit: 2 Stunden. Zugelassene Hilfsmittel: eine selbst mit Formeln beschriebene DIN A4 Seite, mathematische Formelsammlung und Taschenrechner.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Kraftwirkungen die Kraftgesetze $\vec{F}(\vec{r})$ *und* die potentiellen Energien $U(\vec{r})$ an (keine Herleitung oder Begründung):

(a) homogene, isotrope Federkraft (3d, alle Richtungen),

(b) homogenes Schwerefeld, z.B. nahe der Erdoberfläche (3d, Vektoren),

(c) Gravitationskraft für große Abstände vom Erdmittelpunkt (1d: $F(x)$, $U(x)$).

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Die Bewegung eines Massenpunktes mit hoher Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ wird durch die Reibungskraft der turbulenten Strömung (Newton-Reibung) gebremst, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, $F_R = -m\gamma\dot{x}^2$. Außer dieser nichtlinearen Reibungskraft wirkt keine weitere Kraft.

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für $x(t)$?

(b) Schreiben Sie die *nichtlineare* Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ um und berechnen Sie unter den Annahmen $v(0) = v_0$ und $v(t) > 0$ eine Lösung!

(c) Berechnen Sie durch eine weitere Integration $x(t)$!
Hinweis: $\int (a + bx)^{-1}\, dx = (1/b) \ln|a + bx|$.

(d) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie mit der Zeit abnimmt, solange $\dot{x} > 0$!
Hinweis: Dieser Aufgabenteil setzt nur (a) voraus.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Ein zeitperiodischer Vorgang eines schwingungsfähigen Systems der Masse $m = 1$ wird durch folgende komplexe Darstellung beschrieben:

$$x(t) = (2 + i)\, e^{2it} + B\, e^{-2it}.$$

(a) Bestimmen Sie die komplexe Konstante B aus der Forderung, dass $x(t)$ reell ist und geben Sie die reelle Darstellung für $x(t)$ an!
Hinweis: Sie können entweder B raten und dann $x(t)$ in die rein reelle Darstellung umformen oder einen allgemeinen Ansatz für B machen und die Werte im Ansatz aus der Forderung bestimmen, dass $x(t)$ reell ist.

(b) Wie groß ist die Periodendauer T der Schwingung?

(c) Berechnen Sie die Amplitude a der Schwingung aus einer reellen Darstellung!

(d) Wie groß ist die Gesamtenergie des Systems, wenn man die potentielle Energie (wie üblich) in der Ruhelage auf 0 eicht?

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich in einer Dimension unter dem Einfluss der Kraft

$$F(x) = a/x^2 - b; \quad x > 0; \quad a,\ b = const > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage x_0 des Systems.

(b) Berechnen Sie die potentielle Energie $U(x)$.

(c) Entwickeln Sie $U(x)$ in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordnung um die Gleichgewichtslage x_0 und beschrieben Sie kurz die Bedeutung der Terme.

(d) Vergleichen Sie das Resultat mit dem Potential des harmonischen Oszillators. Mit welcher Frequenz schwingt der Massenpunkt bei kleinen Auslenkungen um die Ruhelage?

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Eine Kurve in der x-y-Ebene ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$(x^2 + y^2)^2 = xy \qquad \text{mit } x \geq 0 \text{ und } y \geq 0 \quad \text{(1. Quadrant)}.$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung in Polarkoordinaten (r, φ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$; $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) um, so dass Sie $r(\varphi)$ erhalten!
Hinweis: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve für $0 \leq \varphi \leq \pi/2$!
Hinweis: Berechnen Sie dazu $r(0)$, $r(\pi/4)$ und $r(\pi/2)$; dazwischen ist $r(\varphi)$ monoton.

(c) Berechnen Sie $r'(\varphi)$!

(d) Geben Sie $\dot{r}$ (den Betrag der Radialkomponente der Geschwindigkeit) und $\dot{\vec{r}}$ (den vollen Geschwindigkeitsvektor) in Abhängigkeit von φ an unter der Annahme, dass $\dot{\varphi} = \omega_0$ konstant ist!

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Zusatzaufgabe, um fehlende Punkte in den Aufgaben 1 bis 5 auszugleichen.

Ein mathematisches Pendel wird um $\varphi = 60^o$ ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Wenn es die senkrechte Richtung ($\varphi = 0$, maximale Geschwindigkeit) erreicht, stößt es gegen eine Wand und wird inelastisch reflektiert. Dabei *verliert* es ein Drittel seiner kinetischen Energie, und die Geschwindigkeit kehrt ihr Vorzeichen um.

(a) Geben Sie den Energiesatz vor und nach dem Stoß an!
Hinweis: Eichen Sie die potentielle Energie geschickt; $\cos 60^o = 1/2$.

(b) Welche maximale Auslenkung $\varphi_{\max}$ erreicht das Pendel nach der Reflexion?
Hinweis: Sie brauchen nur den Kosinus des Winkels anzugeben, wenn Sie keinen Taschenrechner benutzen.

Viel Erfolg!