Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Klausur 1 — QUANTENMECHANIK — WS 2002/03

Aufgabe 1 Kurz und knapp! (10 Punkte)

a) Geben Sie die zeitabhängige SG an.
Welche Forderung führt auf diskrete Energieeigenwerte?

b) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ an.

c) Wie lauten die Energieeigenwerte für das Wasserstoffatom?

d) Durch welche Quantenzahlen wird der $3d$-Zustand des Wasserstoffatoms charakterisiert?

e) Geben Sie das asymptotische Verhalten ($r \to \infty$) der Wellenfunktion bei der Streuung an einem räumlich begrenzten Potential an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein geladenes Teilchen (Masse m, Ladung q) befinde sich im Potential $V_1(x) = m\omega^2 x^2/2$. Zusätzlich wirke ein homogenes elektrisches Feld in x-Richtung mit $\vec{E} = A\,\mathbf{e}_x$, das das Potential $V_2(x) = -q\,A\,x$ hervorruft.

a) Geben Sie die Energieeigenwerte für den harmonischen Oszillator $V_1(x)$ an.

b) Zeigen Sie, daß die Energieeigenwerte im Gesamtpotential $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ nur um einen konstanten Beitrag verschoben sind. Geben Sie die Energieeigenwerte im Gesamtpotential an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie:

$$[\hat{p}^2, x], \quad [x^2, \hat{p}] \text{ und } [x^2, \hat{p}^2]. \qquad \left(\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)$$

b) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\,r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\,r^2\,\frac{d}{dr}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die zeitliche Änderung des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$, der nicht explizit von der Zeit t abhängt, ist bestimmt durch

$$\frac{d}{dt}\bar{A} = \frac{i}{\hbar}\overline{\left[\hat{H}, \hat{A}\right]}.$$

Berechnen Sie die Zeitableitung für $\bar{x}$ und $\bar{p}$ für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse m im Schwerefeld der Erde: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + m\,g\,x$.
(g: Erdbeschleunigung)

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Auf einen ebenen Rotator in der xy-Ebene mit Dipolmoment $\mathbf{d} = d\,(\cos\phi,\, \sin\phi,\, 0)$ wirkt das elektrische Feld $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(-|t|/\tau)$. Vor dem Einschalten des Feldes befindet sich der Rotator im Zustand $\varphi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\,m\,\phi)$ (ϕ : Winkel des Rotators zur x-Achse).

a) Zeigen Sie, daß $\varphi_m(\phi)$ eine Eigenfunktion des Rotators ist, der durch den H-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{L}_z^2$ beschrieben wird (I: Trägheitsmoment des Rotators).

b) Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie in welche Zustände der Rotator durch das elektrische Feld übergehen kann (Auswahlregeln), wenn die zeitabhängige Störung durch $\hat{H}_1(t) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$ beschrieben wird und $\mathbf{E}_0$ parallel zur x-Achse ist.