Aufgabe 1 (5P)

Prüfen Sie, ob die folgenden Operatoren hermitesche Operatoren sind:
$\hat{A}\hat{A}^\dagger$, $i(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$ und $(\hat{A} + \hat{A}^\dagger)$, wobei $\hat{A}$ ein beliebiger linearer Operator ist.

Aufgabe 2 (8P)

Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{p}^2, x^2]$, wobei $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ der Impulsoperator ist. Setzen Sie hierbei $[\hat{p}, x] = \frac{\hbar}{i}$ als bekannt voraus.

Aufgabe 3 (5P)

$\hat{U}$ sei ein unitärer Operator. Zeigen Sie, daß die Vektoren $|\varphi_a\rangle$ aus

$$|\varphi_a\rangle = \hat{U}\,|\psi_a\rangle$$

eine vollständig orthonomierte Basis darstellen falls die Vektoren $|\psi_a\rangle$ eine sind. Nehmen Sie an, daß a diskret ist.

Aufgabe 4 (5P)

$f(\hat{A})$ ist Funktion eines hermiteschen linearen Operators $\hat{A}$ mit der Eigenschaft $f(\hat{A})\,|a\rangle = f(a)\,|a\rangle$. Berechnen Sie $\langle b'|\,f(\hat{A})\,|b\rangle$, wenn die Transformationsmatrix von der $|a\rangle$-Basis zur $|b\rangle$-Basis bekannt ist. Nehmen Sie an, daß a kontinuierlich ist.

Aufgabe 5 (5P)

Zeigen Sie, daß für den Erwartungswert des Impulsoperators $\langle\hat{p}\rangle$ im Zustand $\psi(x,t)$ die folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\langle\hat{p}\rangle}{m} = \int dx\, j(x,t),$$

wobei $j(x,t) = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}(\psi^*\frac{d}{dx}\psi)$ die Stromdichte darstellt. $\psi(x,t)$ ist Lösung der zeitabhängigen SG.

Aufgabe 6 (8P)

Zeigen Sie, daß ein beliebiger Operator $\hat{A}$, der mit den Komponenten $\hat{l}_x$ und $\hat{l}_y$ des Bahndrehimpulses $\vec{\hat{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z)$ vertauscht, auch mit $\hat{l}_z$ vertauscht.