Theoretischen Physik II **SS 2007**

Klausur II - Aufgaben und Lösungen

- **Aufgabe 1** *Hohlleiter* **8P**

Gegeben sei ein in z-Richtung unendlich langer, gerader Hohlleiter (Innenradius $R/3$, Außenradius R), der einen Stromfaden entlang der z-Achse umschließt.

a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für $0 \leq s < \infty$ für den Fall, dass im Hohlleiter die konstante elektrische Stromdichte j_0 vorliegt und der Strom I_0 durch den Stromfaden fließt! Beachten Sie die Symmetrie des Problems!

b) Wie groß müsste der elektrische Strom I im Stromfaden sein und wie muss die elektrische Stromdichte im Hohlleiter vom Abstand $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängen, damit die magnetische Induktion im Inneren des Hohlleiters konstant ist?
Hinweis: Testen Sie $j(s) = j_0 \, (s/R_i)^n \; ; \quad n \leq 0$

- **Aufgabe 1 :** *Hohlleiter* **8P**

a) Zur Lösung der Aufgabe kann das Superpositionsprinzip verwendet werden. Das Magnetfeld für den Stromfaden ist bekannt: 5P

$$\mathbf{B}_{SF}(\mathbf{r}) = B_{SF}(s)\, \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad B_{SF}(s) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \tag{1}$$

Innenradius $R_i = R/3$ und Außenradius R_a des Hohlleiters sind gegeben. Damit lässt sich das Feld im Leiter berechnen. Für $s < R_i$ und $s > R_a$ wissen wir sofort:

$$s < R_i \;\; \Rightarrow \;\; B_{HL}(s) = 0 \tag{2}$$

$$s > R_a \;\; \Rightarrow \;\; B_{HL}(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \tag{3}$$

Dabei ist I in (3) der im Hohlleiter fließende Gesamtstrom $I_{HL} = j_0 \pi 8R^2/9$. Innerhalb des Leiters wendet man den Satz von Stokes an und erhält ($R_i < s < R_a$):

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \;\; = \;\; \mu_0 \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{F} = \mu_0 2\pi j_0 \int_{R_i}^{s} r dr \tag{4}$$

$$B_{HL}(s) 2\pi s \;\; = \;\; \mu_0 j_0 \pi \left(s^2 - \frac{R^2}{9} \right) \tag{5}$$

$$B_{HL}(s) \;\; = \;\; \mu_0 \frac{j_0}{2s} \left(s^2 - \frac{R^2}{9} \right) \tag{6}$$

Das Gesamtfeld erhält man durch Superposition der Felder des Stromfadens und des Hohlleiters.

$$B(s) = \begin{cases} \mu_0 I_0/(2\pi s) & s < R/3 \\ \mu_0 I_0/(2\pi s) + \mu_0 j_0/(2s)(s^2 - R^2/9) & R/3 < s < R \\ \mu_0 I_0/(2\pi s) + \mu_0 I_{HL}/(2\pi s) & s > R \end{cases} \tag{7}$$

b) Das Feld im Inneren des Hohlleiters ist bei einer Stromdichte, die sich wie $j(r) = j_0(r/R_i)^n$ verhält, gegeben durch: 3P

$$2\pi s B_{HL}(r) = \mu_0 2\pi \int_{R_i}^{s} dr\, r\, j(r) \tag{8}$$

$$B_{HL}(s) = \frac{\mu_0 j_0}{s} \int_{R_i}^{s} dr\, r \left(\frac{r}{R_i}\right)^n \tag{9}$$

Da das Feld des Hohlleiters die räumliche Variation des Feldes des Stromfadens kompensieren soll, d.h. $\sim 1/s$ variieren soll, muss $n = -1$ gelten. Damit erhält man:

$$B_{HL}(s) = \frac{\mu_0 2\pi j_0}{2\pi s} R_i\,(s - R_i) \tag{10}$$

Damit erhält man dann für das gesamte Feld:

$$B(s) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} + \mu_0 j_0 R_i - \frac{\mu_0 2\pi j_0 R_i^2}{2\pi s} \quad R/3 < s < R \tag{11}$$

Somit muss im Stromfaden ein Strom $I = j_0 2\pi R_i^2$ fließen, um einen konstantes Magnetfeld im Hohlleiter zu erreichen.

- **Aufgabe 2** *Berechnung von Magnetfeldern* **6P**

Wie groß muss der Radius eines stromdurchflossenen Kreises sein, damit bei gleicher Stromstärke im Mittelpunkt des Kreises das gleiche Magnetfeld vorliegt wie in der Mitte eines Quadrates der Seitenlänge a ?
Hinweise:

1. Lösen Sie das Problem mit Hilfe von

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3r'\, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{12}$$

2. Verwenden Sie die Stromfadennäherung !

3. Auch im Falle des Quadrates liegt eine Symmetrie vor, d.h. jede Seite liefert den gleichen Beitrag zum Magnetfeld! Verwenden Sie ggf.

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{a^2} \tag{13}$$

- **Aufgabe 2** *Berechnung von Magnetfeldern* **6P**

a) Man kann aus dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ eine Formel für das Magnetfeld gewinnen (Biot-Savartsches Gesetz). Durch Einsetzen erhält man :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3\,\mathbf{r}'\, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3} \tag{14}$$

b) Die Verwendung der Stromfadennäherung liefert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\,\mathbf{r}' \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid^3} \tag{15}$$

c) Nun kann man die Felder in der Mitte berechnen. Es soll hier darauf hingewiesen werden, dass $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ natürlich eine Funktion von $\mathbf{r}$ ist! Das bedeutet, dass man, wenn man nicht direkt das Biot-Savartsche Gesetz benutz zuerst $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ zu berechnen hat. Danach kann man $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ auswerten und dann $\mathbf{B}$ in der Mitte bestimmen. Man kann natürlich nicht $\mathbf{A}$ im Zentrum berechnen und dann die Rotation einer Konstanten bilden!!

Man hat also die Linienintegrale über den Kreis und das Quadrat auszuwerten. Die Verwendung von Polarkoordinaten liefert für das Feld in der Mitte des Kreises:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \mathbf{e}_z \tag{16}$$

Beim Integrieren über das Quadrat braucht man nur über eine Seite zu integrieren. Dies führt insgesamt auf:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I a \mathbf{e}_z \int_{-a}^{a} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{4\sqrt{2}}{a} \mathbf{e}_z \tag{17}$$

Somit erhält man folgende Beziehung zwischen Kreisradius und Kantenlänge des Quadrats:

$$\frac{1}{R} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi a} \tag{18}$$

- **Aufgabe 3** *Eichtransformationen* **6P**

a) Eichtransformationen der elektromagnetischen Potentiale vom Typ

$$\mathbf{A}^\star = \mathbf{A} + \nabla f \qquad ; \qquad \varphi^\star = \varphi \; - \dot{f} \tag{19}$$

lassen die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ unverändert. Schreiben Sie diese Eichtransformationen in Viererschreibweise um!

b) Zeigen Sie für die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{20}$$

die Invarianz bei Lorentz-Transformation !

- **Aufgabe 3 :** *Eichtransformation* **6P**

a) Vierer-Potential und kontravariante Ableitung sind gegeben durch:

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad , \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \tag{21}$$

Damit sieht man sofort, dass sich die Gleichungen (19) aus

$$A^{\star\mu} = A^\mu - \partial^\mu f \tag{22}$$

ergeben müssen.

b) Die Invarianz bei Lorentz-Transformation ergibt sich wie folgt: 4P

$$\partial'_\mu A'^\mu = (L^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu L^\mu_\alpha A^\alpha = \delta^\nu_\alpha \partial_\nu A^\alpha = \partial_\alpha A^\alpha \tag{23}$$

- **Aufgabe 4** *kovariante Formulierung* **8P**

a) Zeigen Sie mit Hilfe von 3a), dass der Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{24}$$

"eichinvariant", d.h. invariant gegen eine Umeichung der Potentiale ist !

b) Welche Gleichungen verbergen sich hinter der Vierer-Schreibweise

$$\partial^\alpha \; F_{\alpha\beta} = \mu_0 \, j_\beta \tag{25}$$

Werten Sie für alle Indizes β aus !

- **Aufgabe 4 :** *kovariante Formulierung* **8P**

a) Ausgehend von der Definition des kontravarianten Feldstärketensors kann man die Eichtransformation durchführen:

$$\begin{aligned} F^{\star\mu\nu} &= \partial^\mu A^{\star\nu} - \partial^\nu A^{\star\mu} && (26)\\ &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu f) && (27)\\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu f + \partial^\nu \partial^\mu f && (28)\\ &= F^{\mu\nu} && (29) \end{aligned}$$

b) Gegeben ist folgende Gleichung in Vierer-Schreibweise:

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \mu_0 j_\beta \tag{30}$$

Die kontravariante Ableitung des kovarianten Feldstärketensors ist durch die Vierer-Stromdichte bestimmt. Die Gleichung (30) liefert somit 4 Gleichungen für $\beta = 0, 1, 2, 3$. $\beta = 0$ liefert die Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial^0 F_{00} + \partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} &= \mu_0 c \rho && (31)\\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{E_x}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{E_y}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{E_z}{c}\right) &= \mu_0 c \rho && (32)\\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (33) \end{aligned}$$

$\beta = 1, 2, 3$ liefert die 3 Komponenten von $\nabla \times \mathbf{B}$. Zum Beispiel erhält man für $\beta = 1$:

$$\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} = \mu_0 j_1 \quad (34)$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \left(-\frac{\partial}{\partial y}(+B_z) - \frac{\partial}{\partial z}(-B_y)\right) = -\mu_0 j_x \quad (35)$$

$$\frac{1}{c^2}\dot{E}_x - \nabla \times \mathbf{B}_{|x} = -\mu_0 j_x \quad (36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{|x} = \mu_0 j_x + \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_x \quad (37)$$

- **Aufgabe 5 :** *Lorentz-Transformationen* **8P**

  a) Leiten Sie aus der speziellen Lorentz-Transformation die Beziehungen zur Transformation der räumlichen und zeitlichen Intervalle $\triangle t$ bzw. $\triangle x$ ab !

  b) Mit welcher Relativgeschwindigkeit V bewegen sich die beiden Inertialsysteme gegeneinander ?
  Wie gross ist der zeitliche Abstand der beiden Ereignisse in Σ' ?

  c) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm mit allen Projektionen der beiden Ereignisse auf die Achsen für den Fall $t_0 = 4s$.
  Hinweis: Eichen Sie die Achsen in Lichtsekunden!

- **Aufgabe 5** *Lorentz-Transformationen* **8P**

  a) Aus der Lorentz-Transformation 3P

$$x^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (38)$$

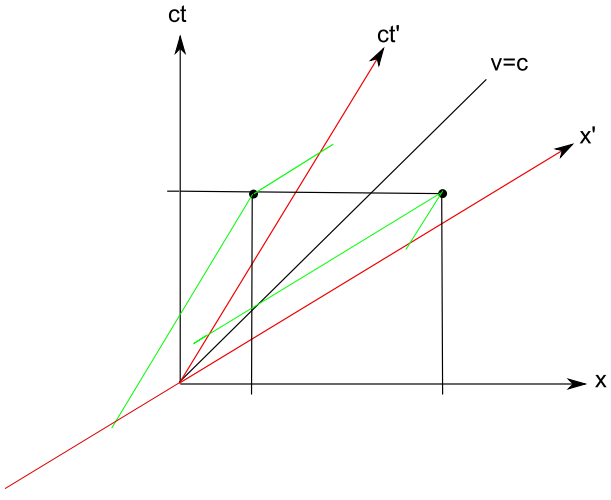

Abbildung 1: Minkowski-Diagramm zur Aufgabe 5c

ergeben sich für die Transformation von Orts- ($\Delta x = x_2 - x_1$) und Zeitintervallen ($\Delta t = t_2 - t_1$) die folgenden Gleichungen:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{39}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{40}$$

b) Zwei Ereignisse sind in Σ gleichzeitig und haben den räumlichen Abstand von 4 Ls. In Σ' haben die Ereignisse einen räumlichen Abstand von 5 Ls. Aus der Gleichung (40) erhält man:

$$5Ls = \frac{4Ls}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{41}$$

Auflösen nach β liefert letztlich $\beta = 3/5$ bzw. $v = 3c/5$. Der zeitliche Abstand beider Ereignisse in Σ' lässt sich aus (39)berechnen. Es ergibt sich $\Delta t' = -3sec.$ Ereignis 2 tritt also früher ein als Ereignis 1.

c) Vorgegeben ist $t_0 = 4s$. Ansonsten sind aber nur Zeit- bzw. Ortsdifferenzen vorgegeben. Nimmt man z.B. $x_1 = 2Ls$ an, so sind die Ereignisse fixiert und man kann die Koordinaten im Minkowski-Diagramm ablesen. Schematisch ist dies in Abb. 1 dargestellt.