Theoretische Physik A – Schlussklausur Sommersemester 2008

18. Juli 2008, Dozent: J. Kantelhardt

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Schritte des Lösungswegs müssen klar erkennbar sein – ein Verweis auf Computeralgebra reicht nicht. Bearbeitungszeit: 2 Stunden. Zugelassene Hilfsmittel: eine selbst mit Formeln beschriebene DIN A4 Seite, Formelblatt Koordinatensysteme, mathematische Formelsammlung und Taschenrechner.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Welche Erhaltungsgrößen (Energie E, Impulse p_x, p_y, p_z, Drehimpulse L_x, L_y, L_z) sind in den folgenden dreidimensionalen Beispielen konstant? Überlegen Sie sich dazu die Symmetrieeigenschaften des jeweiligen Potentials. (U_0, a, γ = konst.)

(a) Bewegung eines Massenpunktes im Potential $U(\vec{r}) = U_0(x^2 + y^2)/a^2$,

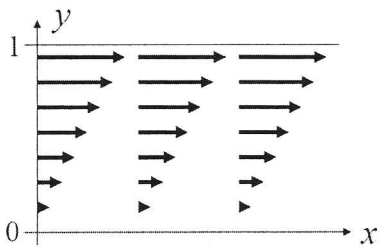
(b) Bewegung eines Massenpunktes im Potential $U(\vec{r}) = U_0 \cos(z/a) \exp(-\gamma t)$,

(c) Bewegung eines Massenpunktes im Zentralpotential $U(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$ mit einer beliebigen Funktion $f(r)$.
Begründen Sie zusätzlich, warum hier die Bewegung in einer Ebene stattfindet!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Auf einen Probekörper in einer ebenen Scherströmung mit Geschwindigkeitsprofil $\vec{v}_s(\vec{r}) = v_0\, y\, \vec{e}_x$ für $-\infty < x < \infty$ und $0 \le y \le 1$ wirkt eine Reibungskraft $\vec{F} = \gamma \vec{v}_s = \gamma v_0 y \vec{e}_x$, siehe Skizze. Berechnen Sie den Wert der Arbeit

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$



die zu verrichten ist, um den Probekörper vom Punkt $\vec{r}_1 = (0,0,0)$ zum Punkt $\vec{r}_2 = (1,1,0)$ zu bewegen längs der folgenden Wege:

(a) entlang der kartesischen Koordinatenachsen (erst x-Achse, dann y-Achse),

(b) entlang der Verbindungsgeraden ($y = x$) zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$,

(c) entlang des Parabelstückes $y = x^2$ zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.

Ist das Kraftfeld $\vec{F}$ konservativ?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Prüfen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential $U(\vec{r})$; $a > 0$ ist konstant.

(a) $F_x = 2axy$, $F_y = a(x^2 + 2yz)$, $F_z = ay^2$.

(b) $\vec{F} = ar^2\vec{e}_r$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 4: (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie Divergenz und Rotation des folgenden Vektorfelds:

$$\vec{f} = c_0(-y, x, 0)$$

(b) Rechnen Sie $\vec{f}$ in Zylinderkoordinaten um und stellen Sie das Vektorfeld mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$ $(= \vec{e}_r)$ und $\vec{e}_\varphi$ dar!

(c) Skizzieren Sie den Verlauf der Feldlinien in der x-y-Ebene!

(d) Berechnen Sie Divergenz und Rotation ausgehend von der Darstellung in Zylinderkoordinaten (wie in (b) erhalten)! Nutzen Sie für die Rechnung die entsprechenden Darstellungen der Divergenz und der Rotation.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Gegeben ist die Flächenladungsdichte (Ladung pro Fläche in der x-y-Ebene; a = konst.)

$$\sigma(x, y) = \frac{c_0}{(a^2 + x^2 + y^2)^3} + c_1\delta(x)\delta(y - a).$$

Berechnen Sie die gesamte Ladung durch Integration über die x-y-Ebene,

$$Q = \int_{\mathbb{R}^2} \int \sigma(x, y)\, |d\vec{A}|.$$

Hinweise: Teilen Sie das Integral auf, berechnen Sie den ersten Teil in Polarkoordinaten (oder Zylinderkoordinaten) und substituieren Sie $a^2 + r^2$.

Aufgabe 6: (7+4 Punkte)

Auf ein Teilchen mit Masse m und Ladung q wirkt in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ die Kraft $\vec{F} = q(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = qB_0(\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z)$.

(a) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie T erhalten ist!

(b) Stellen Sie die drei Newtonschen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) für die Komponenten in kartesischen Koordinaten auf!

(c) Stellen Sie die drei Newtonschen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) für die Komponenten in Zylinderkoordinaten auf!
Hinweise: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ entspricht dem r in Polarkoordinaten, $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$, $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$ und $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$.

(d) (Zusatzaufgabe für die 4 zusätzlichen Punkte)
Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus Teil (b) (allgemeine Lösung für $\vec{r}(t)$).
Hinweis: Man kann die beiden gekoppelten Gleichungen trennen, indem man einmal ableitet und einsetzt.

Viel Erfolg und schöne Semesterferien!