Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

KLAUSUR (II) QUANTENMECHANIK WS 2001/2002

Aufgabe 1 (10P)

Ein starres Hantelmolekül rotiere im Raum um den Koordinatenursprung mit zwei Freiheitsgraden, die den Winkeln θ (Polarwinkel) und ϕ (Azimuthwinkel) entsprechen (Starrer Rotator). Das Molekül werde durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mathcal{J}}\,\hat{\vec{L}}^2 \qquad \begin{array}{l}\mathcal{J}: \text{Trägheitsmoment des Moleküls}\\ \hat{\vec{L}}: \text{ Operator Bahndrehimpuls}\end{array}$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systems. Diskutieren Sie eventuelle Entartungsgrade.

b) Kann die Wellenfunktion $f(\phi) = A\sin\phi$ (A: konst.) auch eine Eigenfunktion von $\hat{H}$ sein? (Begründung!)

Aufgabe 2 (10P)

Berechnen Sie den Erwartungswert des Spinoperators $\hat{S}_z$ für ein Teilchen im Spinzustand

$$|\alpha\rangle = \alpha_+\,|\uparrow\rangle + \alpha_-\,|\downarrow\rangle \quad \alpha_\pm: \text{ kompl. Zahlen,}$$

wobei $|\uparrow\rangle \equiv |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ und $|\downarrow\rangle \equiv |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$ Eigenzustände von $\hat{S}_z$ für ein Teilchen mit Spin 1/2 sind.

Aufgabe 3 (10P)

Gegeben sei der folgende Operator

$$\hat{U} = e^{i\epsilon\hat{F}} = \left(1 + i\epsilon\hat{F}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{F} = \hat{F}^\dagger \quad \text{und} \quad \epsilon: \text{ reell, und infinitesimal klein.}$$

a) Zeigen Sie, daß $\hat{U}$ ein unitärer Operator ist.

b) Zeigen Sie, daß ein beliebiger Operator $\hat{A}$ durch eine infinitesimale unitäre Transformation, d.h. durch $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger = \tilde{\hat{A}}$, in der Form

$$\tilde{\hat{A}} = \hat{A} + i\epsilon\left[\hat{F}, \hat{A}\right]$$

geschrieben werden kann.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (10P)

Ein Elektron soll aus dem Grundzustand des H-Atoms in einen angeregten Zustand durch Photoabsorption angehoben werden.

a) Wie lautet die Energiebilanz für diesen Vorgang, wenn $\hbar\omega$ die Energie der Photonen ist?

b) Geben Sie die Auswahlregeln für Dipolübergänge im H-Atom an, wenn die Anregung mit linear polarisierter Strahlung (Polarisationsvektor $\vec{u} = \vec{e}_z$) bzw. mit zirkular polarisierter Strahlung (Polarisationsvektor $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\,\vec{e}_y)$ erfolgt.

Aufgabe 5 (10P)

Zwei Fermionen mit Spin 1/2 sollen sich wechselwirkungsfrei in einem eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bewegen:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| \geq a. \end{cases}$$

a) Stellen Sie die SG für das Zweiteilchen-System auf. Zeigen Sie, daß die Energieeigenzustände des Systems in einen Orts- und Spinanteil separieren. Welche Symmetrie muß der Ortsanteil des Zweiteilchen-Zustandes haben, wenn die Teilchenspins parallel bzw. antiparallel sind?

b) Geben Sie die Wellenfunktion und die Energie des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes des Zweiteilchen-Systems an.

Aufgabe 6 (10P)

Der Vielteilchenzustand $|n_1 n_2 \ldots\rangle$ (Besetzungszahl-Darstellung) sei Eigenzustand zum Operator $\hat{N} = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$ mit Eigenwert $N = \sum_\alpha n_\alpha$, d.h.

$$\hat{N}\,|n_1, n_2, \ldots\rangle = N\,|n_1, n_2, \ldots\rangle.$$

Die Operatoren $\hat{a}_\alpha$ und $\hat{a}_\alpha^\dagger$ genügen den Vertauschungsrelationen $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$ und $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0$.

a) Berechnen Sie $[\hat{N}, \hat{a}_\beta]$ und $[\hat{N}, \hat{a}_\beta^\dagger]$.

b) Zeigen Sie, daß die Zustände $\hat{a}_\beta^\dagger\,|n_1, n_2, \ldots\rangle$ und $\hat{a}_\beta\,|n_1, n_2, \ldots\rangle$ auch Eigenzustände zum Operator $\hat{N}$ sind. Geben Sie die entsprechenden Eigenwerte an.